

Todennäköisyyslaskenta I, kesä 2017
Helsingin yliopisto/Avoim Yliopisto
Harjoitus 1, 1.-4.8.2017

Laskuharjoitukset on tarkoitus tehdä etukäteen ja ilmaantua paikalle laskuharjoitusryhmään. ”Laskareissa” käsitellään tavalla tai toisella tehtäviä, ja tehdyistä tehtävistä saa lisäpisteitä kurssikokeeseen.

Ratkaise näiden harjoitusten tehtävät soveltamalla todennäköisyyden klassista määritelmää (Tuomisen kirja, sivu 9), missä tapahtuman $A \subseteq \Omega$ todennäköisyys on sen sisältämien alkeistapausten määrä jaettuna koko perusjoukon alkeistapausten määrällä $n := |\Omega|$:

$$P(A) = \frac{|A|}{n}.$$

Kaikissa tehtävissä oletetaan, että symmetrisyys pätee, eli että alkeistapaukset ovat yhtä todennäköisiä.

1. Kokeet ja Ω :n hahmottaminen. Mitä tarkoittaa ”todennäköisyys on $\frac{1}{3}$ ”?

Olkoon satunnaiskokeena ”yhden nopan heitto”, ja mahdollisten tulosten joukko on $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Keksi ainakin kolme eri tapahtumaa A , B ja C , joilla on kullakin todennäköisyys $\frac{1}{3}$.

2. Jatkoa perusjoukon käsitteeseen.

Kolikkoa heitetään 3 kertaa. Luettele perusjoukko Ω , eli mahdolliset heittotulosten jonot (8 kpl), kun 0 merkitsee klaavaa ja 1 kruunaa. Mikä on todennäköisyys, että saadaan

- a) tasan 0 kruunaa
- b) tasan 1 kruuna
- c) tasan 2 kruunaa
- d) tasan 3 kruunaa
- e) enintään 2 kruunaa
- f) pariton määrä kruunia?

Huomaa, että vaihtoehdot (a)–(d) ovat toisensa poissulkevia ja ne kattavat yhdessä kaikki mahdollisuudet (kruunia on välttämättä joko 0, 1, 2 tai 3). Mikä niiden todennäköisyyksien summan täytyy siis olla? Tarkista, että laskemasi summa täsmää.

3. Joukot vs. todennäköisyydet. Snadisti joukko-oppia.

Käsitellään edelleen yhden nopan heittoa. Olkoon $A = \{2, 4, 6\}$ parillisten tulosten joukko ja $B = \{4, 5, 6\}$ ”suurten tulosten joukko”. Muodosta leikkaus $A \cap B$ (ts. luettele sen alkio) ja yhdiste $A \cup B$. Ovatko A ja B erilliset, ts. onko niiden leikkaus tyhjä?

Laske Tuomisen kirjan määritelmän 1.1.1 mukaisesti (alkioiden lukumääriä laskemalla) luvut $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ ja $P(A \cup B)$. Tarkista, että laskemillesi luvuille pätee sivulla 11 väitetty ominaisuus

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

4. Tapahtumien todennäköisyyksien laskemista.

Kahden nopan heitto.

- a) Mikä on tapahtuman A : ”Kummankin nopan silmäluku on sama” (eli että saadaan pari) todennäköisyys?

b) Mikä on tapahtuman B : "Ensimmäisen nopan silmäluku on parillinen, ja toisen nopan silmäluku on suurempaa kuin 3" todennäköisyys?

c) Mikä on tapahtuman C : "Pienempi silmäluvuista on pienempi kuin 3" todennäköisyys (helpointa lienee jälleen luetella ja laskea tapahtumaan C kuuluvat alkeistapaukset)?

5. Koiria ja muistutus siitä, että välillä pitää tehdä oletuksia. Riippumattomuuden käsite.

Emokoira synnyttää neljän pennun pentueen. Oletamme, että molempien sukupuolien syntymistodennäköisyydet ovat yhtä suuret ja että eri pentujen sukupuolet ovat toisistaan riippumattomia.

a) Millä todennäköisyydellä pentueeseen syntyy yhtä monta naarasta kuin urosta?

b) Millä todennäköisyydellä pentueeseen syntyy yksi naaras ja kolme urosta?

Vihje: tehtävän voi ratkaista joko binomikertoimien avulla tai luettelemalla kaikki mahdolliset alkeistapaukset. Alkeistapaukset voidaan esittää merkkijonoilla, jossa esim. UNUU tarkoittaa sitä, että ensimmäisenä syntyy urospentu, toisena naaraspentu, kolmantena urospentu ja neljäntenä urospentu.

6. Pokerikädet, niiden mielenkiintoisuus ja liittyimen perusjoukon käsitteeseen.

Pokerikäsi. Nostetaan sekoitetusta korttipakasta 5 korttia.

a) Määrittele perusjoukko Ω ? Kuinka monta alkioita siinä on?

b) Mikä on tapahtuman A : "saadaan väri" (kaikki kortit samaa maata) todennäköisyys?

c) Mikä on tapahtuman B : "saadaan pari" (kaksi korttia joiden numero on sama) todennäköisyys?

7. Lisää populäärikulttuurista lähestymistä todennäköisyyslaskentaan.

Lottoarvonta. Kone arpoo 7 palloa 39:stä pallosta, jotka on numeroitu yhdestä 39:ään (arvottuja palloja ei palauteta, kyseessä on siis otanta ilman takaisinpanoa). Oletetaan, että arvonta on satunnainen, eli että kaikki lottorivit ovat yhtä todennäköisiä.

a) Määrittele perusjoukko Ω . Kuinka monta alkioita siinä on?

b) Mikä on todennäköisyys saada 7 oikein?

c) Entä 5 oikein?