Todennäköisyyslaskenta I, kesä 2017
Helsingin yliopisto/Avoin Yliopisto
Harjoitus 2, 8.-11.8.2017

1. Eräässä väestössä on $N = 2\,000$ ihmistä, joista 1000 kannattaa puoluetta A, 600 kannattaa puoluetta B ja 400 kannattaa puoluetta C. Poimitaan väestöstä umpimähkään ilman takaisinpanoa 3 henkilöä. Millä todennäköisyydellä otoksessa on pelkästään puolueen A kannattajia?

2. Jatkoa edelliseen tehtävään. Laske sama siten, että otos muodostetaan takaisinpanolla.

Tutustu Tuomisen lukuihin 1.2–1.4. ja luentomateriaalin kappaleeseen 1.4. Jatkossa todennäköisyys P tarkoittaa jotakin kuvausta eli funktiota, joka noudattaa määritelmää (Tuominen) 1.2.2. tai 1.2.1 (luentomateriaali). Alkeistapaukset eivät ole välttämättä yhtä todennäköiset, joten et voi nojautua määritelmään 1.1.1 (Tuominen) tai 1.3 (Luentomateriaali) ja siitä johdettuihin tuloksiin.

3. *Painotettu noppa.* Erästä noppaa on painotettu siten, että tulosten $1, 2, 3, 4, 5, 6$ todennäköisyydet ovat $0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.2$ ja 0.3 (tässä järjestyksessä). Olkoon $A = \{2, 4, 6\}$ parillisten tulosten joukko ja $B = \{4, 5, 6\}$ "suurten tulosten joukko". Laske nyt todennäköisyydet $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ ja $P(A \cup B)$.

4. Oletetaan, että $P(A) = 0.3$ ja $P(B) = 0.4$. Paljonko luku $P(A \cap B)$ on **(a)** enintään, **(b)** vähintään?

Tutustu Tuomisen lukuihin 1.7 ja 1.10 tai luentomateriaaliin luvusta 1.4 alkaen.

5. Pussissa on kaksi noppaa: yksi tavallinen kuusisivuinen (sivujen numerot $1, \ldots, 6$) ja yksi nelisivuinen (sivujen numerot $1, \ldots, 4$). Kummassakin nopassa sivut ovat keskenään yhtä todennäköiset. Pussista poimitaan umpimähkään yksi noppa, ja sitä heitetään kerran. Mitkä ovat heittotulosten $1, \ldots, 6$ todennäköisyydet? (Käytä kokonaistodennäköisyyden kaavaa.)

6. Eräässä kunnassa on 1000 asukasta. Kunta jakautuu neljään alueeseen A, B, C ja D, joiden asukasluvut ovat 100, 100, 300 ja 500. Kamreeri K valitsee ensin umpimähkään (symmetrisesti) yhden alueista ja sitten kyseiseltä alueelta umpimähkään (symmetrisesti) yhden asukkaan.

(a) Mikko asuu alueella A. Mikä on hänen todennäköisyytensä tulla valituksi?

(b) Ville asuu alueella D. Mikä on hänen todennäköisyytensä tulla valituksi?

7. Miten edellisessä tehtävässä olisi alueen valinta pitänyt tehdä, jotta jokaisella asukkaalla olisi yhtä suuri todennäköisyys tulla valituksi?

8. Eräässä populaatiossa on $n = 1000$ henkilöä. Heistä 300 on rokotettu erästä sairautta vastaan. Rokotetuista 3 sairastui ja rokottamattomista 100 sairastui. Tarkastelemme nyt populaatiosta umpimähkään valittua henkilöä X (ts. valintamme osuu kuhunkin henkilöön todennäköisyydellä $1/n$).

(a) Mikä on tn, että X sairastui, ehdolla, että hänet on rokotettu?

(b) Mikä on tn, että X sairastui **ja** hänet on rokotettu?

(c) Mikä on tn, että X on rokotettu, ehdolla, että hän sairastui?