Todennäköisyyslaskenta I, kesä 2017
Helsingin yliopisto/Avoin Yliopisto
Harjoitus 1, ratkaisuehdotukset

1. *Kokeet ja* Ω*:n hahmottaminen. Mitä tarkoittaa "todennäköisyys on* $\frac{1}{3}$*"?*

Olkoon satunnaiskokeena "yhden nopan heitto", ja mahdollisten tulosten joukko on $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Keksi ainakin kolme *eri* tapahtumaa A, B ja C, joilla on kullakin todennäköisyys $\frac{1}{3}$.

Ratkaisuehdotus: Ratkaisuksi kelpaavat mitkä tahansa kahden alkion osajoukot, esim. $A = \{1, 2\}$, $B = \{4, 5\}$ ja $C = \{2, 3\}$. Koska esim. joukon A alkioiden lukumäärä $|A| = 2$ ja perusjoukon alkioiden lukumäärä $n = |\Omega| = 6$, niin luentomateriaalin määritelmän 1.3 nojalla (Tuomisen kirjan määritelmä 1.1.1) $P(A) = |A|/n = 2/6 = 1/3$.

2. *Jatkoa perusjoukon käsitteeseen.*

Kolikkoa heitetään 3 kertaa. Luettele perusjoukko Ω, eli mahdolliset heittotulosten jonot (8 kpl), kun 0 merkitsee klaavaa ja 1 kruunaa. Mikä on todennäköisyys, että saadaan

a) tasan 0 kruunaa

b) tasan 1 kruuna

c) tasan 2 kruunaa

d) tasan 3 kruunaa

e) enintään 2 kruunaa

f) pariton määrä kruunia?

Huomaa, että vaihtoehdot (a)–(d) ovat toisensa poissulkevia ja ne kattavat yhdessä kaikki mahdollisuudet (kruunia on välttämättä joko 0, 1, 2 tai 3). Mikä niiden todennäköisyyksien summan täytyy siis olla? Tarkista, että laskemasi summa täsmää.

Ratkaisuehdotus: Merkitään tehtävänannon mukaisesti heittotulosten jonoja nollilla ja ykkösillä. Esim. jonoa (klaava, klaava, kruuna) vastaa merkintä (0,0,1). Perusjoukko Ω eli mahdolliset heittotulosten jonot ovat nyt (0,0,0), (0,0,1), (0,1,1), (0,1,0), (1,0,1), (1,0,0), (1,1,0) ja (1,1,1). Alkeistapauksia on siis kahdeksan.

a) Sellaisia heittotulosten jonoja, joissa on tasan 0 kruunaa, on yksi (0,0,0), joten

$$P(\text{"saadaan tasan 0 kruunaa"}) = \frac{1}{8}$$

b) Sellaisia heittotulosten jonoja, joissa on tasan 1 kruuna, on kolme (0,0,1), (0,1,0) ja (1,0,0), joten

$$P(\text{"saadaan tasan 1 kruuna"}) = \frac{3}{8}$$

c) Sellaisia heittotulosten jonoja, joissa on tasan 2 kruunaa, on kolme (0,1,1), (1,0,1) ja (1,1,0), joten

$$P(\text{"saadaan tasan 2 kruunaa"}) = \frac{3}{8}$$

d) Sellaisia heittotulosten jonoja, joissa on tasan 3 kruunaa on yksi (1,1,1), joten

$$P(\text{"saadaan tasan 3 kruunaa"}) = \frac{1}{8}$$

e) Sellaisia heittotulosten jonoja, joissa on enintään 2 kruunaa on seitsemän (0,0,0), (0,0,1), (0,1,1), (0,1,0), (1,0,1), (1,0,0) ja (1,1,0), joten

$$P(\text{"saadaan enintään 2 kruunaa"}) = \frac{7}{8}$$

f) Sellaisia heittotulosten jonoja, joissa on pariton määrä kruunia on neljä (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0) ja (1,1,1), joten

$$P(\text{"saadaan pariton määrä kruunia"}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Huomataan, että toisensa poissulkevien ja kaikki mahdollisuudet kattavien vaihtoehtojen (a)-(d) todennäköisyyksien summa on

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1,$$

kuten pitääkin.

3. *Joukot vs. todennäköisyydet. Snadisti joukko-oppia.*

Käsitellään edelleen yhden nopan heittoa. Olkoon $A = \{2, 4, 6\}$ parillisten tulosten joukko ja $B = \{4, 5, 6\}$ "suurten tulosten joukko". Muodosta leikkaus $A \cap B$ (ts. luettele sen alkiot) ja yhdiste $A \cup B$. Ovatko A ja B erilliset, ts. onko niiden leikkaus tyhjä?

Laske Tuomisen kirjan määritelmän 1.1.1 mukaisesti (alkioiden lukumääriä laskemalla) luvut $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ ja $P(A \cup B)$. Tarkista, että laskemillesi luvuille pätee sivulla 11 väitetty ominaisuus

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Ratkaisuehdotus: Leikkaus on $A \cap B = \{4, 6\}$ ja yhdiste on $\{2, 4, 5, 6\}$.

Koska leikkaus ei ole tyhjä joukko, ts. koska A:lla ja B:llä on ainakin yksi yhteinen alkio (tässä alkiot 4 ja 6), niin A ja B **eivät ole** erilliset.

Suoraan määritelmää 1.1.1 soveltamalla lasketaan

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} \\ P(B) &= \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} \\ P(A \cap B) &= \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{n(\{4, 6\})}{6} = \frac{2}{6} \\ P(A \cup B) &= \frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(\{2, 4, 5, 6\})}{6} = \frac{4}{6} \end{aligned}$$

Sijoittamalla nämä luvut yhteenlaskukaavaan saadaan väite

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ \frac{4}{6} &= \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} \\ \frac{4}{6} &= \frac{4}{6} \end{aligned}$$

joka pitää paikkansa (kuten pitäisikin).

4. *Tapahtumien todennäköisyyksien laskemista.*

Kahden nopan heitto.

a) Mikä on tapahtuman A: ”Kummankin nopan silmäluku on sama” (eli että saadaan pari) todennäköisyys?

b) Mikä on tapahtuman B: ”Ensimmäisen nopan silmäluku on parillinen, ja toisen nopan silmäluku on suurempaa kuin 3” todenäköisyys?

c) Mikä on tapahtuman C : ”*Pienempi* silmäluvuista on pienempi kuin 3” todennäköisyys (helpointa lienee jälleen luetella ja laskea tapahtumaan C kuuluvat alkeistapaukset)?

Ratkaisuehdotus: Tässä tehtävässä voi olla havainnollistavaa piirtää seuraavanlainen taulukko, joka kuvastaa kaikkia mahdollisia kahden nopan heiton tuloksia (36 kpl).

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

a) Kaikista mahdollisista heittotuloksista pareja on kuusi kappaletta (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5) ja (6,6).

	1	2	3	4	5	6
1	•					
2		•				
3			•			
4				•		
5					•	
6						•

Siis $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

b) Etsitään taas suotuisat alkeistapaukset.

	1	2	3	4	5	6
1						
2				•	•	•
3						
4				•	•	•
5						
6				•	•	•

Suotuisia alkeistapauksia on yhdeksän, joten $P(B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

Jos tehtävänannon tulkitsi tarkoittavan, että kumpi tahansa nopista saa olla parillinen ja toinen suurempaa kuin kolme (ts. toinen nopista ei ole nimetty ”ensimmäiseksi nopaksi”), niin suotuisia alkeistapauksia on enemmän:

	1	2	3	4	5	6
1						
2				•	•	•
3						
4		•		•	•	•
5		•		•		•
6		•		•	•	•

Tällöin $P(B) = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$

c) Luetellaan jälleen tapahtumaan kuuluvat alkeistapaukset. Tapahtuma C tarkoittaa, että ainakin toinen silmäluvuista on yksi tai kaksi.

	1	2	3	4	5	6
1	•	•	•	•	•	•
2	•	•	•	•	•	•
3	•	•				
4	•	•				
5	•	•				
6	•	•				

Suotuisia alkeistapauksia on 20, joten $P(C) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$

Tehtävänannon voi tulkita myös niin, että toisen silmäluvuista täytyy olla aidosti toista pienempi. Tällöin alkeistapaukset, joissa molempien noppien silmäluku on 1 tai molempien noppien silmäluku on 2, eivät ole enää suotuisia alkeistapauksia, sillä pienempää silmälukua ei ole.

	1	2	3	4	5	6
1		•	•	•	•	•
2	•		•	•	•	•
3	•	•				
4	•	•				
5	•	•				
6	•	•				

Suotuisia alkeistapauksia on nyt siis 18, joten $P(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

5. *Koiria ja muistutus siitä, että välillä pitää tehdä oletuksia. Riippumattomuuden käsite.*

Emokoira synnyttää neljän pennun pentueen. Oletamme, että molempien sukupuolien syntymistodennäköisyydet ovat yhtä suuret ja että eri pentujen sukupuolet ovat toisistaan riippumattomia.

a) Millä todennäköisyydellä pentueeseen syntyy yhtä monta naarasta kuin urosta?

b) Millä todennäköisyydellä pentueeseen syntyy yksi naaras ja kolme urosta?

Vihje: tehtävän voi ratkaista joko binomikertoimien avulla tai luettelemalla kaikki mahdolliset alkeistapaukset. Alkeistapaukset voidaan esittää merkkijonoilla, jossa esim. UNUU tarkoittaa sitä, että ensimmäisenä syntyy urospentu, toisena naaraspentu, kolmantena urospentu ja neljäntenä urospentu.

Ratkaisuehdotus:

a) Sellaisia pentueita, joissa on kaksi naarasta, on $\binom{4}{2} = 6$ (NNUU, NUNU, NUUN, UNNU, UNUN, UUNN).

Kaikkia mahdollisia neljän pennun pentueita on $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 2^4 = 16$.

Näin ollen P(”syntyy yhtä monta naarasta kuin urosta”) $= P$(”syntyy kaksi naarasta”) $= \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

b) Sellaisia pentueita, joissa on yksi naaras ja kolme urosta, on $\binom{4}{1} = 4$ (NUUU, UNUU, UUNU, UUUN). Kaikkien mahdollisten pentueiden määrä on edelleen sama, eli 16.

Näin ollen P(”syntyy yksi naaras ja kolme urosta”) $= \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

6. *Pokerikädet, niiden mielenkiintoisuus ja liittyimen perusjoukon käsitteeseen.*
Pokerikäsi. Nostetaan sekoitetusta korttipakasta 5 korttia.

a) Määrittele perusjoukko Ω? Kuinka monta alkiota siinä on?

b) Mikä on tapahtuman A: "saadaan väri" (kaikki kortit samaa maata) todennäköisyys?

c) Mikä on tapahtuman B: "saadaan pari" (kaksi korttia joiden numero on sama) todennäköisyys?

Ratkaisuehdotus:

(a) Perusjoukko Ω on kaikkien mahdollisten pokerikäsien joukko, eli kaikki erilaiset viiden nostetun kortin osajoukot. Mahdollisia pokerikäsiä on yhteensä $\binom{52}{5} = 2\ 598\ 960$ kappaletta.

(b) Korttipakassa on neljä maata, joten maa voidaan valita $\binom{4}{1} = 4$ eri tavalla. Jokaiseen maahan kuuluu 13 korttia, joista voidaan valita viisi $\binom{13}{5} = 1287$ eri tavalla. Sellaisia viiden kortin joukkoja, jossa kaikki kortit ovat samaa maata on $\binom{4}{1} \cdot \binom{13}{5} = 4 \cdot 1287 = 5148$ kappaletta, jolloin

$$P(A) = \frac{5\ 148}{2\ 598\ 960} \approx 0.002$$

Ylläoleva tapa laskee väriksi myös värisuoran (viisi samaa maata olevaa peräkkäistä korttia). Jos värisuoria ei haluta laskea mukaan, ne on vähennettävä äsken lasketuista 5 148 käden joukosta. Erilaisia värisuoria on $\binom{10}{1} \cdot \binom{4}{1} = 40$ kappaletta, jolloin jäljelle jää 5 108 erilaista kättä ja

$$P(A) = \frac{5\ 108}{2\ 598\ 960} \approx 0.002$$

Todennäköisyys pysyy lähes samana tästä huolimatta.

(c) Jos parin ajatellaan tarkoittavan täsmälleen paria eikä mitään arvokkaampaa pokerikättä hyväksytä (kaksi paria, kolme samaa, täyskäsi ja neljä samaa sisältävät myös parin), niin helpointa lienee laskea näiden käsien lukumäärä. Erilaisia pareja kaikista 13 numeroarvosta ja 4 maasta saadaan muodostettua $\binom{13}{1} \cdot \binom{4}{2} = 78$ kappaletta. Loput kolme korttia voivat olla mitä tahansa jäljellä olevaa kahdestatoista numeroarvosta ja kukin saa olla mitä tahansa maata. Näin ollen täsmälleen parin sisältävien käsien määrä on $\binom{13}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{12}{3} \cdot \binom{4}{1}^3 = 1\ 098\ 240$ ja

$$P(B) = \frac{1\ 098\ 240}{2\ 598\ 960} \approx 0.42$$

Jos ajatellaan parin tarkoittavan "vähintään paria" eli toisin sanoen myös kaksi paria, kolme samaa, täyskäsi ja neljä samaa lasketaan pareiksi, niin tämä lienee helpointa laskea komplementin avulla. Parin saaminen on komplementti tapahtumalle: "kaikki kortit ovat eri numeroarvoa".

Lasketaan sellaisten pokerikäsien lukumäärä, jossa kaikki kortit ovat eri numeroarvoa. Viisi eri numeroarvoa voidaan valita $\binom{13}{5} = 1287$ tavalla ja koska kortit saavat olla mitä tahansa maata, niin tällaisten pokerikäsien lukumäärä on $\binom{13}{5} \cdot \binom{4}{1}^5 = 1\ 317\ 888$ ja

$$P(B) = 1 - \left(\frac{1317888}{2598960}\right) \approx 0.49$$

Kumpi tahansa ajattelutapa on oikein.

7. *Lisää populäärikulttuurista lähestymistä todennäköisyyslaskentaan.*

Lottoarvonta. Kone arpoo 7 palloa 39:stä pallosta, jotka on numeroitu yhdestä 39:ään (arvottuja palloja ei palauteta, kyseessä on siis otanta ilman takaisinpanoa). Oletetaan, että arvonta on satunnainen, eli että kaikki lottorivit ovat yhtä todennäköisiä.

a) Määrittele perusjoukko Ω. Kuinka monta alkiota siinä on?

b) Mikä on todennäköisyys saada 7 oikein?

c) Entä 5 oikein?

Ratkaisuehdotus:

a) Perusjoukko Ω on kaikkien mahdollisten lottorivien joukko ja siinä on $\binom{39}{7} = 15\ 380\ 937$ alkiota.

b) Lottorivejä, jossa kaikki seitsemän numeroa ovat oikein on yksi, jolloin

$$P(\text{"seitsemän oikein"}) = \frac{1}{\binom{39}{7}} = \frac{1}{15380937} \approx 0.00000007$$

c) Selvitetään, montako sellaista lottoriviä on olemassa, jossa viisi numeroa on oikein. Seitsemästä "oikeasta" numerosta voidaan lottoriviin valita viisi numeroa $\binom{7}{5}$ tavalla ja lopuista 32 "väärästä" numerosta voidaan valita lottoriviin loput kaksi numeroa $\binom{32}{2}$ tavalla, jolloin erilaisia viisi oikein-rivejä on $\binom{7}{5} \cdot \binom{32}{2} = 10416$ kappaletta ja

$$P(\text{"viisi oikein"}) = \frac{\binom{7}{5} \cdot \binom{32}{2}}{\binom{39}{7}} \approx 0.0007$$