Todennäköisyyslaskenta I, kesä 2017
Helsingin yliopisto/Avoin Yliopisto
Harjoitus 3, 15.-18.8.2017

1. *Aikaisemman viikon teemaa.* Edessäsi on kaksi laatikkoa A ja B. Laatikossa A on 8 palloa, joista puolet valkoisia. Laatikossa B on 12 palloa, joista puolet on valkoisia. Valitset laatikon satunnaisesti siten, että laatikko A tulee valituksi tn:llä 3/4. Valitusta laatikosta poimit umpimähkään kaksi palloa *ilman takaisinpanoa.*

(a) Laske ehdollinen tn saada täsmälleen 1 valkoinen pallo, jos laatikko on A.

(b) Laske ehdollinen tn saada täsmälleen 1 valkoinen pallo, jos laatikko on B.

(c) Laske tn saada täsmälleen 1 valkoinen pallo.

(d) Jos saat 1 valkoisen pallon, mikä on tällöin tn, että valitsit laatikon A?

Tehtävät 2-5 käsittelevät diskreettejä satunnaismuuttujia.

2. *Kolmen nopan heitto ja edelleen tuttujen tilanteiden hahmottaminen satunnaismuuttujien avulla.*

(a) Noppaa heitetään kolme kertaa, ja X on satunnaismuuttuja, joka saa arvokseen suurimman tuloksista. Määritä todennäköisyys $P(X \leq 5)$. Vihje: Voit joko tarkastella kaikkia 216:ta alkeistapausta (työlästä mutta suoraviivaista), tai voit tarkastella tapahtumaa toistokokeena: onko jokainen heitto enintään nelonen?

(b) Määritä todennäköisyys $P(X \leq k)$ kaikille $k = 1, \dots, 6$. (Olet nyt saanut selville X:n kertymäfunktion.)

(c) Määritä pistetodennäköisyys $P(X = k)$ kaikille $k = 1, \dots, 6$. (Vihje: tarkastele kertymäfunktion arvoja peräkkäisillä kokonaisluvuilla.)

3. *Soveltava tilanne äärettömässä perusjoukossa* Herrat A ja B heittävät vuorotellen kolikkoa, järjestyksessä ABABAB... Se voittaa, joka heittää ensin kruunan, ja tällöin peli päättyy. Mikä on todennäköisyys, että pelissä heitetään k klaavaa? Laske todennäköisyys, että A voittaa. Vihje: A voittaa, jos ensimmäinen kruuna tulee koko pelissä 1. heitolla, 3. heitolla, 5. heitolla **tai** millä tahansa parittoman numeroisella heitolla. Esitä A:n voittotodennäköisyys geometrisena sarjana ja laske sen arvo.

4. *Satunnaismuuttujien soveltamista*(Tuominen 2:5) Henkilö hamuilee avainnippuaan ulko-ovella. Nipussa on n avainta, joista yksi sopii oveen. Olkoon X sen kerran järjestysluku, jolla ovi aukeaa. Laske X:n pistetodennäköisyysfunktio ja kertymäfunktio olettaen, että

(a) muistaa mitä avaimia hän on turhaan yrittänyt, ja joka kokeilulla valitsee kokeiltavan avaimen umpimähkään niistä, joita ei ole vielä kokeiltu,

(b) ei muista mitä avaimia hän on turhaan yrittänyt, vaan valitsee joka kerta avaimen umpimähkään kaikista n:stä avaimesta.

5. *Klassikko. Toistokoe vai satunnaismuuttuja?*(Vrt. Tuominen 2:18) Lentoyhtiö tietää kokemuksesta, että keskimäärin 5 % paikan varanneista jää saapumatta lennolle. Lentoyhtiö tekee vielä rohkean oletuksen, että jokainen matkustaja *muista matkustajista riippumatta* jää saapumatta tn:llä 0.05. Yhtiö myy 255 lippua koneeseen, johon mahtuu 250 matkustajaa. Millä tn:llä jokainen koneeseen saapuva saa paikan? (Vihje: Komplementtitapahtuma voi lyhentää laskuja.)

Tehtävät 6-9 käsittelevät jatkuvia satunnaismuuttujia.

6. *Jatkuvan jakauman esimerkit ovat luonnollisia aloittaa tasajakaumalla.* Junan pitäisi saapua Helsinkiin kello 10.00. Se kuitenkin myöhästyy ajan X (minuuttia), jolla on tasainen jakauma yli välin $(-1.0, 2.5)$. Negatiivinen myöhästyminen tarkoittaa etuajassa saapumista. Laske tn, että juna saapuu

(a) aikataulun mukaiseen aikaan (10.00) mennessä,

(b) välillä 10.00 – 10.02,

(c) yli 2 minuuttia myöhässä.

7. *Lisää klassikoita.* Herra K odottaa raitiovaunua. Raitiovaunut kulkevat tasan 10 minuutin välein ja K tulee pysäkille satunnaiseen aikaan, joten hänen odotusaikansa minuutteina on $X \sim \mathrm{Tas}(0, 10)$.

(a) Herra K on juuri saapunut pysäkille. Mikä on tn, että raitiovaunu saapuu seuraavan minuutin aikana?

(b) Herra K on odottanut jo 5 minuuttia, ts. hän on havainnut, että X ei ollut pienempi kuin 5. Mikä on tn, että raitiovaunu saapuu seuraavan minuutin aikana? (Vihje: Ehdollinen todennäköisyys.)

(c) Kuten b-kohta, mutta herra K on odottanut jo 9.5 minuuttia.

8. *Tiheysfunktio, kertymäfunktio ja niiden soveltaminen.* Olkoon erään komponentin kestoaika (vuosina) jatkuva satunnaismuuttuja $X \sim \mathrm{Exp}(2)$.

(a) Laske todennäköisyys, että komponentti hajoaa ensimmäisen vuoden aikana, ts. välillä $(0, 1)$.

(b) Muodosta yleinen lauseke todennäköisyydelle, että komponentti hajoaa välillä $(k, k+1)$, ts. $k+1$:nnen vuoden aikana.

(c) Olkoon Y diskreetti satunnaismuuttuja, joka kertoo, montako kokonaista vuotta komponentti kesti, ts. jos komponentti esim. hajoaa hetkellä $X = 1.5$, niin silloin $Y = 1$. Mitkä ovat Y:n mahdolliset arvot ja niiden pistetodennäköisyydet?

(d) Osoita, että Y:n jakauma on eräs geometrinen jakauma eräällä parametrilla p. Laske p:n arvo.

9. *Jakauman tunnistaminen reaalimaailman tilanteesta.* Kalle ajaa autoa maantiellä. Tuulilasiin osuu kiviä satunnaisesti, keskimäärin yksi kivi 100 kilometrillä.

(a) Olkoon X se matka, jonka kuluttua tuulilasiin osuu kivi ensimmäisen kerran. Millä jakaumalla X:ää voidaan mallintaa?

(Vihje: Koska X voi olla mikä tahansa positiivinen reaaliluku, kyseessä täytynee olla jokin jatkuva jakauma.)

(b) Laske X:n jakauman avulla $P(X \leq 200)$, ts. todennäköisyys että ensimmäinen kiveniskemä tulee jo ensimmäisten 200 kilometrin aikana.

(c) Olkoon Y kiveniskemien lukumäärä, kun Kalle ajaa 200 kilometriä. Mikä on Y:n jakauma?

(Vihje: Koska Y on ilmeisestikin jokin ei-negatiivinen kokonaisluku, jakauman täytyy olla diskreetti.)

(d) Laske Y:n jakauman avulla $P(Y > 0)$, ts. todennäköisyys että ensimmäisillä 200 kilometrillä tulee ainakin yksi kiveniskemä. Vertaa b-kohdan tulokseen.