Todennäköisyyslaskenta I, kesä 2017
Helsingin yliopisto/Avoin Yliopisto
Harjoitus 4, 22.-25.8.2017

Viimeiset tehtävät. Kurssin tiiviydestä johtuen asioita on paljon viimeisiin laskareihin, mutta näihin kannattaa silti käyttää mahdollisimman paljon aikaa. Jakaumien perusominaisuudet (integroituminen ykköseksi), niiden tunnusluvut (odotusarvo, varianssi) ja niillä operoiminen sekä yleisimmät tn-laskennan epäyhtälöt ja normaaliapproksimaatio ovat ennen kaikkea hyödyllisiä, mutta myös hyviä tärppejä kokeeseen.

1. *Jatkuvan jakauman tiheysfunktion yleiset ominaisuudet, integrointiharjoittelua.*

Satunnaismuuttujalla X on ns. kaksipuolinen eksponenttijakauma eli Laplacen jakauma: sen tiheysfunktio on

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

(a) Piirrä tiheysfunktio.

(b) Tarkista integroimalla ja toteamalla positiivisuus kaikissa pisteissä, että kyseessä on todella tiheysfunktio.

(c) Laske $E(X)$.

(Vihje: Voit käyttää osittaisintegrointia, tai hyödyntää jakauman symmetrisyyttä origon suhteen.)

(d) Laske $P(|X| > 2)$.

2. *Odotusarvo ns. Bernoullin utiliteettiteorian kautta eli malli siitä, että vedonlyöjä toimii odotusarvoisen voiton mukaisesti. Lisäksi kiinnostava twisti näkökulmaan, että luentojen esimerkissä odotusarvoa ei ole olemassa.*

Tarkastellaan seuraavaa peliä (vrt. luentojen esimerkki 2.37 tai Tuomisen esim. 2.2.5.) : heitetään kolikkoa, kunnes saadaan ensimmäinen kruuna. Pelaaja voittaa 2^k dukaattia, missä k on heittojen määrä. Oletetaan tällä kertaa kuitenkin, että kasinon varat ovat rajalliset: pelaajan voittosumma yhdellä kierroksella on 2^{20} (reilu miljoona) dukaattia kaikille $k \geq 20$. Kuinka paljon yllä kuvatusta pelistä kannattaa tällöin korkeintaan maksaa?

3. *Paloittain määritellyn jakauman odotusarvo ja todennäköisyydet. Myöhemmillä TN-laskennan kursseilla palataan satunnaismuuttujien summien jakaumaan yleisesti. Check it out.*

Kahden riippumattoman Tas(0,1)-satunnaismuuttujan (esim. X ja Y) summa on Z. Tiedetään (vrt. Tuominen s. 72), että Z:llä on tiheysfunktio

$$f(z) = \begin{array}{ll} z, & \text{kun } 0 < z \leq 1, \\ 2 - z, & \text{kun } 1 < z < 2, \\ 0 & \text{muualla.} \end{array}$$

Laske $E(Z)$ ja $P(0.5 < Z < 1.5)$.

4. *Odotusarvo käytännössä, versio [mones].*

Tarkastellaan peliä, jossa pelaaja heittää kahta noppaa. Jos ensimmäisellä kierroksella pelaaja heittää silmälukujen summaksi 7 tai 11, hän voittaa dollarin ja peli loppuu. Jos taas silmälukujen summa on 2,3, tai 12, peli loppuu ja pelaaja ei voita mitään. Jos silmälukujen summa ei ole kumpikaan näistä, pelaaja jatkaa heittämistä, kunnes hän joko heittää silmälukujen summaksi 7, jolloin peli loppuu ja pelaaja ei voita mitään, tai heittää uudelleen saman silmälukujen summan kuin ensimmäisellä kierroksella, jolloin hän voittaa yhden dollarin ja peli loppuu.

Mikä on pelaajan voiton odotusarvo yhdellä pelikerralla (kun heitetään siihen asti että peli loppuu)? Kannattaako tästä pelistä maksaa yhtä dollaria?

5. *Klassikko. Tärkeä tehtävä: odotusarvo ja varianssi satunnaismuuttujien affiineille muutoksille. Tehtävän ei pitäisi olla liian haastava!*

Olkoot satunnaismuuttujat X, Y ja Z riippumattomia, joilla kaikilla on sama odotusarvo μ ja varianssi σ^2. Laske odotusarvo ja varianssi satunnaismuuttujille

(a) $2X + 3$,

(b) $X - Y$,

(c) $X - \frac{1}{2}Y$,

(d) $X + 2Y + 3Z$,

(e) XY,

(f) XYZ.

6. *Tunnuslukuja!*

Painotettua kolikkoa, jossa kruunan todennäköisyys on $p = 1/3$, heitetään n kertaa. Olkoon Y kruunien lukumäärä ja $X = Y/n$ kruunien suhteellinen frekvenssi. Laske X:n odotusarvo, varianssi ja keskihajonta.

7. *Jatkoa edelliseen. Tsebysevin epäyhtälö virhesuuruuden arvioinnissa.*

(a) Olkoon $\epsilon = 0.01$. Toivomme, että X olisi ϵ:n tarkkuudella likiarvo oikealle todennäköisyydelle, ts. toivomme, että toteutuu epäyhtälö $|X - p| < \epsilon$. Sen komplementtitapahtumaa $|X - p| \geq \epsilon$ kutsumme *liian suureksi virheeksi*, ja merkitään kirjaimella L. Laske Tsebysevin epäyhtälön (Tuomisen kirjassa lause 3.2.8 sivu 85) perusteella yläraja todennäköisyydelle $P(L)$.

(b) Kuinka suuri on n:n oltava, jotta Tsebysevin epäyhtälön nojalla $P(L) < 0.05$?

9. *Tässä vaiheessa huomaamme, että normaaliapproksimaatiolle on jotain käyttöä.*

Koetta, jossa heitetään kuutta arpakuutiota, toistetaan 5000 kertaa. Tarkastellaan tapahtuman $A =$ "kaikki kuusi noppaa osoittavat eri pistelukua" esiintymistä. Laske normaaliapproksimaatiolla tn, että A esiintyy toistokokeessa yli 80 kertaa.

10. *Viimeinen. Klassikko tämäkin.*

Herra K odottaa bussia. Pysäkiltä kulkee kolme eri bussilinjaa A, B ja C, ja herra K voi yhtä hyvin matkustaa millä tahansa niistä. Bussit kulkevat satunnaisesti: kunkin bussin saapumisaika on tasajakautunut välillä $(0, 8)$, toisista busseista riippumatta. 0 tarkoittaa hetkeä, jolloin K saapui pysäkille.

(a) Mikä on tn, että yksikään busseista ei saavu ensimmäisten neljän minuutin aikana?

(b) Mikä on tn, että yksikään busseista ei saavu ensimmäisten k minuutin aikana (kun k on jokin reaaliluku välillä $[0, 8]$)?

(c) Olkoon X se hetki, jolloin ensimmäinen busseista saapuu, ts. herra K:n odotusaika. Määritä X:n kertymäfunktio ja tiheysfunktio.