Todennäköisyyslaskenta I, kesä 2017
Helsingin yliopisto/Avoin yliopisto
Harjoitus 3, ratkaisuehdotuksia

1. *Aikaisemman viikon teemaa.* Edessäsi on kaksi laatikkoa A ja B. Laatikossa A on 8 palloa, joista puolet valkoisia. Laatikossa B on 12 palloa, joista puolet on valkoisia. Valitset laatikon satunnaisesti siten, että laatikko A tulee valituksi tn:llä 3/4. Valitusta laatikosta poimit umpimähkään kaksi palloa *ilman takaisinpanoa.*

(a) Laske ehdollinen tn saada täsmälleen 1 valkoinen pallo, jos laatikko on A.

(b) Laske ehdollinen tn saada täsmälleen 1 valkoinen pallo, jos laatikko on B.

(c) Laske tn saada täsmälleen 1 valkoinen pallo.

(d) Jos saat 1 valkoisen pallon, mikä on tällöin tn, että valitsit laatikon A?

Ratkaisuehdotus:
Merkitään $Y =$ *"saadaan täsmälleen 1 valkoinen pallo"* ja $A =$ *"valittiin laatikko A"*. Nyt tapahtuman A komplementti eli A^C tarkoittaa, että valittiin laatikko B.

(a) Laatikon A kahdeksasta pallosta poimitaan kaksi ilman takaisinpanoa. Laatikon palloista neljä on valkoisia. Kysytty todennäköisyys on

$$P(Y \mid A) = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{4}{7} \approx 0.571\,.$$

(b) Samoin kuin (a)-kohdassa, saadaan

$$P(Y \mid A^C) = \frac{\binom{6}{1}\binom{6}{1}}{\binom{12}{2}} = \frac{6}{11} \approx 0.545\,.$$

(c) Kokonaistodennäköisyyden kaavalla saadaan

$$P(Y) = P(A)P(Y \mid A) + P(A^C)P(Y \mid A^C) = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{7} + \frac{1}{4}\cdot\frac{6}{11} = \frac{87}{154} \approx 0.565\,.$$

(d) Bayesin kaavalla saadaan

$$P(A \mid Y) = \frac{P(A)P(Y \mid A)}{P(Y)} = \frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{7}}{\frac{87}{154}} = \frac{22}{29} \approx 0.759\,.$$

2. *Kolmen nopan heitto ja edelleen tuttujen tilanteiden hahmottaminen satunnaismuuttujien avulla.*

(a) Noppaa heitetään kolme kertaa, ja X on satunnaismuuttuja, joka saa arvokseen suurimman tuloksista. Määritä todennäköisyys $P(X \leq 5)$. Vihje: Voit joko tarkastella kaikkia 216:ta alkeistapausta (työlästä mutta suoraviivaista), tai voit tarkastella tapahtumaa toistokokeena: onko jokainen heitto enintään nelonen?

(b) Määritä todennäköisyys $P(X \leq k)$ kaikille $k = 1, \ldots, 6$. (Olet nyt saanut selville X:n kertymäfunktion.)

(c) Määritä pistetodennäköisyys $P(X = k)$ kaikille $k = 1, \dots, 6$. (Vihje: tarkastele kertymäfunktion arvoja peräkkäisillä kokonaisluvuilla.)

Ratkaisuehdotus:

(a) Satunnaismuuttuja X saa arvokseen korkeintaan luvun viisi silloin, kun 1. heiton tulos on korkeintaan viisi **ja** 2. heiton tulos on korkeintaan viisi **ja** 3. heiton tulos on korkeintaan viisi. Koska heittojen tulokset ovat riippumattomia, niin kysytyksi todennäköisyydeksi saadaan

$$P(X \leq 5) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5^3}{6^3} = \frac{125}{216} \approx 0.579\,.$$

(b) Arvoilla $k = 1, \dots, 6$ todennäköisyys

$$P(X \leq k) = \frac{k}{6} \cdot \frac{k}{6} \cdot \frac{k}{6} = \frac{k^3}{216}\,.$$

(c) Huomataan, että (b)-kohdan kaava pätee myös arvolla $k = 0$, sillä $P(X \leq 0) = 0 = \frac{0^3}{216}$. Koska kaikilla $k = 1, \dots, 6$ pätee $P(X \leq k) = P(X \leq k-1) + P(X = k)$ (erillisten tapahtumien yhdiste), niin pistetodennäköisyys

$$P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1) = \frac{k^3}{216} - \frac{(k-1)^3}{216} = \frac{k^3 - (k-1)^3}{216}\,.$$

3. *Soveltava tilanne äärettömässä perusjoukossa* Herrat A ja B heittävät vuorotellen kolikkoa, järjestyksessä ABABAB... Se voittaa, joka heittää ensin kruunan, ja tällöin peli päättyy. Mikä on todennäköisyys, että pelissä heitetään k klaavaa? Laske todennäköisyys, että A voittaa. Vihje: A voittaa, jos ensimmäinen kruuna tulee koko pelissä 1. heitolla, 3. heitolla, 5. heitolla **tai** millä tahansa parittoman numeroisella heitolla. Esitä A:n voittotodennäköisyys geometrisena sarjana ja laske sen arvo.

Ratkaisuehdotus: Kun katsomme vain heitettyjen kolikoiden jonoa (emmekä välitä siitä, kuka heittää), huomaamme, että kyseessä on rajaton toistokoe onnistumistn:llä $p = \frac{1}{2}$. Turhien yritysten eli klaavojen määrä on satunnaismuuttuja X, jolla on geometrinen jakauma parametrilla $p = \frac{1}{2}$. Merkitään $q = 1 - p = \frac{1}{2}$.

Todennäköisyys, että pelissä heitetään täsmälleen k klaavaa, on

$$P(X = k) = pq^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

Herra A voittaa täsmälleen silloin, kun X on parillinen, ts. $X = 0$ tai $X = 2$ jne. Tämän tn:ksi saadaan täysadditiivisuuden nojalla

$$\begin{aligned} P(\text{“}A\ voittaa\text{”}) &= P(X = 0) + P(X = 2) + P(X = 4) + \dots \\ &= p + pq^2 + pq^4 + \dots \end{aligned}$$

Kyseessä on geometrinen sarja, jonka ensimmäinen termi on p, ja peräkkäisten termien suhde on $q^2 = 1/4$. Sarjan summa on siis

$$\frac{p}{1 - q^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

Siis $P(\text{“}A\ voittaa\text{”}) = \frac{2}{3}$.

4. *Satunnaismuuttujien soveltamista* (Tuominen 2:5). Henkilö hamuilee avainnippuaan ulkoovella. Nipussa on n avainta, joista yksi sopii oveen. Olkoon X sen kerran järjestysluku, jolla ovi aukeaa. Laske X:n pistetodennäköisyysfunktio ja kertymäfunktio olettaen, että

(a) muistaa mitä avaimia hän on turhaan yrittänyt, ja joka kokeilulla valitsee kokeiltavan avaimen umpimähkään niistä, joita ei ole vielä kokeiltu,

(b) ei muista mitä avaimia hän on turhaan yrittänyt, vaan valitsee joka kerta avaimen umpimähkään kaikista n:stä avaimesta.

Ratkaisuehdotus: Merkitään O_i = *"valitaan oikea avain i:nnellä yrityksellä"* ja V_i = *"valitaan väärä avain i:nnellä yrityksellä"*. jjj

(a) X:n pistetodennäköisyysfunktion arvo $f(k)$ eli tapahtuman $\{X = k\}$ (ovi aukeaa k:nnella yrityksellä) todennäköisyys, kun $k = 1, 2, \ldots, n$, on

$$\begin{aligned} f(k) &= P(X = k) \\ &= P(V_1) \cdot P(V_2) \cdot \ldots \cdot P(V_{k-1}) \cdot P(O_k) \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{n-(k-1)}{n-(k-2)} \cdot \frac{1}{n-(k-1)} \\ &= \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Vastaavasti X:n kertymäfunktion arvo $F(k)$ eli tapahtuman $\{X \leq k\}$ todennäköisyys, kun $k = 1, 2, \ldots, n$, on

$$F(k) = P(X \leq k) = P(X = 1) + P(X = 2) + \ldots + P(X = k) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} = \frac{k}{n}.$$

(b) X:n pistetodennäköisyysfunktion arvo $f(k)$ eli tapahtuman $\{X = k\}$ (ovi aukeaa k:nnella yrityksellä) todennäköisyys, kun $k = 1, 2, \ldots$, on

$$\begin{aligned} f(k) &= P(X = k) \\ &= P(V_1) \cdot P(V_2) \cdot \ldots \cdot P(V_{k-1}) \cdot P(O_k) \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}. \end{aligned}$$

Vastaavasti X:n kertymäfunktion arvo $F(k)$ eli tapahtuman $\{X \leq k\}$ todennäköisyys, kun $k = 1, 2, \ldots$, on

$$\begin{aligned} F(k) &= P(X \leq k) = P(X = 1) + P(X = 2) + \ldots + P(X = k) \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k}{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)} \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k. \end{aligned}$$

5. *Klassikko. Toistokoe vai satunnaismuuttuja?* (Vrt. Tuominen 2:18) Lentoyhtiö tietää kokemuksesta, että keskimäärin 5 % paikan varanneista jää saapumatta lennolle. Lentoyhtiö tekee vielä rohkean oletuksen, että jokainen matkustaja *muista matkustajista riippumatta* jää saapumatta tn:llä 0.05. Yhtiö myy 255 lippua koneeseen, johon mahtuu 250 matkustajaa. Millä tn:llä jokainen koneeseen saapuva saa paikan? (Vihje: Komplementtitapahtuma voi lyhentää laskuja.)

Ratkaisuehdotus: Kyseessä on toistokoe: $n = 255$ matkustajasta kukin jää saapumatta tn:llä $p = 0.05$ (kutsumme tätä onnistumiseksi), ja saapuu tn:llä $1-p = 0.95$. Merkitään onnistumisten (ts. pois jääneiden matkustajien) lukumäärää satunnaismuuttujalla X, jolloin $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$.

Kaikki saapuneet saavat paikan, jos vähintään 5 jää saapumatta, ts. jos $X \geq 5$. Lasketaan tämän tapahtuman todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(X \geq 5) &= 1 - P(X < 5) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{4} P(X = k) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{4} \binom{255}{k} 0.05^k 0.95^{255-k} \\ &\approx 0.9962. \end{aligned}$$

Tehtävässä on oltava tarkkana epäyhtälöiden kanssa. Tapahtuman $\{X \geq 5\}$ komplementti on tapahtuma $\{X < 5\}$ eli $\{X \leq 4\}$, koska X saa vain kokonaislukuarvoja.

Ilman "komplementtisääntöä" (luentomateriaalin lause 1.31.(ii)) olisi voitu laskea työläämmin $P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + \ldots + P(X = 254) + P(X = 255)$, jolloin olisi pitänyt laskea 251 termiä. Tulos olisi kyllä sama.

6. *Jatkuvan jakauman esimerkit ovat luonnollisia aloittaa tasajakaumalla.* Junan pitäisi saapua Helsinkiin kello 10.00. Se kuitenkin myöhästyy ajan X (minuuttia), jolla on tasainen jakauma yli välin $(-1.0, 2.5)$. Negatiivinen myöhästyminen tarkoittaa etuajassa saapumista. Laske tn, että juna saapuu

(a) aikataulun mukaiseen aikaan (10.00) mennessä,

(b) välillä 10.00 – 10.02,

(c) yli 2 minuuttia myöhässä.

Ratkaisuehdotus: Tarkastelemme väliä $(-1.0, 2.5)$, jolle osuu junan myöhästymisen määrä minuutteina. Koska kyseessä on tasajaukauma, keskenään yhtäpitkät välit ovat yhtä todennäköisiä, ja tiheys on vakio, ts. sama kaikkialla tällä välillä.

(a) Halutaan laskea tn, että juna ei myöhästy, eli että juna saapuu välillä $(-1, 0)$, ts.

$$P(X \leq 0) = \frac{0 - (-1)}{2.5 - (-1)} = \frac{1}{3.5}$$

(b) Halutaan laskea tn, että juna saapuu välillä $(0, 2)$, ts.

$$P(0 \leq X \leq 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 0) = \frac{2 - (-1)}{2.5 - (-1)} - \frac{1}{3.5} = \frac{2}{3.5}$$

(c) Halutaan laskea tn, että juna saapuu välillä $(2, 2.5)$, ts.

$$P(2 \leq X \leq 2.5) = P(X \leq 2.5) - P(X \leq 2) = \frac{2.5-(-1)}{2.5-(-1)} - \frac{2-(-1)}{2.5-(-1)} = \frac{0.5}{3.5}$$

7. *Lisää klassikoita.* Herra K odottaa raitiovaunua. Raitiovaunut kulkevat tasan 10 minuutin välein ja K tulee pysäkille satunnaiseen aikaan, joten hänen odotusaikansa minuutteina on $X \sim \text{Tas}(0, 10)$.

(a) Herra K on juuri saapunut pysäkille. Mikä on tn, että raitiovaunu saapuu seuraavan minuutin aikana?

(b) Herra K on odottanut jo 5 minuuttia, ts. hän on havainnut, että X ei ollut pienempi kuin 5. Mikä on tn, että raitiovaunu saapuu seuraavan minuutin aikana? (Vihje: Ehdollinen todennäköisyys.)

(c) Kuten b-kohta, mutta herra K on odottanut jo 9.5 minuuttia.

Ratkaisuehdotus:

a)

$$P(X \leq 1) = \frac{1-0}{10-0} = \frac{1}{10}.$$

b)

$$\begin{aligned}
P(5 \leq X \leq 6 \mid X \geq 5) &= \frac{P(\{5 \leq X \leq 6\} \cap \{X \geq 5\})}{P(X \geq 5)} \\
&= \frac{P(5 \leq X \leq 6)}{P(X \geq 5)} \\
&= \frac{P(X \leq 6) - P(X \leq 5)}{1 - P(X \leq 5)} \\
&= \frac{\frac{6}{10} - \frac{5}{10}}{1 - \frac{5}{10}} \\
&= \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
P(9.5 \leq X \leq 10.5 \mid X \geq 9.5) &= \frac{P(\{9.5 \leq X \leq 10.5\} \cap \{X \geq 9.5\})}{P(X \geq 9.5)} \\
&= \frac{P(9.5 \leq X \leq 10.5)}{P(X \geq 9.5)} \\
&= \frac{P(X \geq 9.5)}{P(X \geq 9.5)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

8. *Tiheysfunktio, kertymäfunktio ja niiden soveltaminen.* Olkoon erään komponentin kestoaika (vuosina) jatkuva satunnaismuuttuja $X \sim \text{Exp}(2)$.

(a) Laske todennäköisyys, että komponentti hajoaa ensimmäisen vuoden aikana, ts. välillä $(0, 1)$.

(b) Muodosta yleinen lauseke todennäköisyydelle, että komponentti hajoaa välillä $(k, k+1)$, ts. $k+1$:nnen vuoden aikana.

(c) Olkoon Y diskreetti satunnaismuuttuja, joka kertoo, montako kokonaista vuotta komponentti kesti, ts. jos komponentti esim. hajoaa hetkellä $X = 1.5$, niin silloin $Y = 1$. Mitkä ovat Y:n mahdolliset arvot ja niiden pistetodennäköisyydet?

(d) Osoita, että Y:n jakauma on eräs geometrinen jakauma eräällä parametrilla p. Laske p:n arvo.

Ratkaisuehdotus: Kun $X \sim \mathrm{Exp}(2)$, niin X:n kertymäfunktio on $F(x) = 1 - e^{-2x}$.

(a)

$$\begin{aligned} P(0 \leq X \leq 1) &= P(X \leq 1) \\ &= F(1) \\ &= 1 - e^{-2} \\ &\approx 0.86 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(k \leq X \leq k+1) &= P(X \leq k+1) - P(X \leq k) \\ &= F(k+1) - F(k) \\ &= 1 - e^{-2(k+1)} - (1 - e^{-2k}) \\ &= e^{-2k} - e^{-2(k+1)} \end{aligned}$$

(c) Y:n mahdolliset arvot ovat $0, 1, 2, 3, \ldots$ eli kaikki ei-negatiiviset kokonaisluvut.

$$P(Y = k) = P(k \leq X < k+1),$$

mikä (b)-kohdan perusteella on $e^{-2k} - e^{-2(k+1)}$

(d)

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= P(k \leq X < k+1) \\ &= e^{-2k} - e^{-2(k+1)} \\ &= e^{-2k}(1 - e^{-2}) \\ &= (e^{-2})^k (1 - e^{-2}) \\ &= (1 - (1 - e^{-2}))^k (1 - e^{-2}) \end{aligned}$$

Koska Y:n pistetodennäköisyysfunktio on $P(Y = k) = (1 - (1 - e^{-2}))^k (1 - e^{-2})$, noudattaa se geometrista jakaumaa parametrilla $p = (1 - e^{-2})$.

9. *Jakauman tunnistaminen reaalimaailman tilanteesta.* Kalle ajaa autoa maantiellä. Tuulilasiin osuu kiviä satunnaisesti, keskimäärin yksi kivi 100 kilometrillä.

(a) Olkoon X se matka, jonka kuluttua tuulilasiin osuu kivi ensimmäisen kerran. Millä jakaumalla X:ää voidaan mallintaa?

(Vihje: Koska X voi olla mikä tahansa positiivinen reaaliluku, kyseessä täytynee olla jokin jatkuva jakauma.)

(b) Laske X:n jakauman avulla $P(X \leq 200)$, ts. todennäköisyys että ensimmäinen kiveniskemä tulee jo ensimmäisten 200 kilometrin aikana.

(c) Olkoon Y kiveniskemien lukumäärä, kun Kalle ajaa 200 kilometriä. Mikä on Y:n jakauma?

(Vihje: Koska Y on ilmeisestikin jokin ei-negatiivinen kokonaisluku, jakauman täytyy olla diskreetti.)

(d) Laske Y:n jakauman avulla $P(Y > 0)$, ts. todennäköisyys että ensimmäisillä 200 kilometrillä tulee ainakin yksi kiveniskemä. Vertaa b-kohdan tulokseen.

Ratkaisuehdotus:

(a) Tilanne on matemaattisesti samankaltainen kuin Tuomisen s. 59 esitetyssä kuvitellussa laitteessa, joka on hetkellä $t = 0$ kunnossa, mutta voi rikkoutua milloin tahansa (vrt. kivi voi osua tuulilasiin milloin tahansa). Sopiva malli kuluvalle matkalle on eksponenttijakauma. Eksponenttijakauman parametri λ vastaa riskiä tapahtuman toteutumiselle *matkan (tai ajan) yksikköä kohti*, joten tässä se olisi $\lambda = 1/100$ (mikäli matkan yksikkö on kilometri). Siis $X \sim \text{Exp}(1/100)$.

(b) Eksponenttijakauman kertymäfunktiota käyttäen saamme:

$$P(X \leq 200) = 1 - e^{-\frac{1}{100} \cdot 200} = 1 - e^{-2} \approx 0.86$$

(c) Ajatellaan tilanne toistokokeena, jossa kiven osuminen tuulilasiin on "harvinainen tapahtuma suuressa populaatiossa". 200 kilometrin matkan voi jaka lyhyisiin osaväleihin, esim. 200:aan kilometrin pituiseen väliin, joista kussakin kivi osuu tuulilasiin todennäköisyydellä 1/100. Tällöin olisi $Y \sim \text{Bin}(200, \frac{1}{100})$. Lyhentämällä osavälejä rajatta päädytään raja-arvona Poisson-jakaumaan parametrilla $np = 200 \cdot (1/100) = 2$, vrt. kirjan huomautus 2.1.17.

Siis $Y \sim \text{Poisson}(2)$.

(d) Poisson-jakauman kertymäfunktiota ja "komplementtisääntöä" käyttäen saamme:

$$P(Y > 0) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \frac{2^0 \cdot e^{-2}}{0!} = 1 - e^{-2} \approx 0.86$$

Todennäköisyys on sama kuin b-kohdassa, kuten pitäisikin, sillä kyseessä on sama tapahtuma hiukan eri sanoin kuvattuna.