

Todennäköisyyslaskenta I
Kurssikoe / Avoin yliopisto
5.9.2016

1. Luennoitsijan kauluspaidat ovat kahdessa kaapissa. Ensimmäisessä on 6 ruudullista, 3 raidallista, ja 2 yksiväristä paitaa. Toisessa on 4 ruudullista, 4 raidallista, ja 8 yksiväristä paitaa.

(a) Luennoitsija valitsee kaapin umpimähkään, ja ottaa sieltä satunnaisen kauluspaidan. Millä todennäköisyydellä paita on ruudullinen?

(a) Luennoitsija valitsee kaapin umpimähkään, ja valitsee sieltä kolme satunnaista kauluspaitaa (laittamatta ensiksi valittuja takaisin kaappiin). Osoittautuu, että kaikki valitut paidat ovat ruudullisia. Millä todennäköisyydellä luennoitsija otti paidat ensimmäisestä kaapista?

2. Kattolampussa on kolme energiansäästölamppua (EU-lainsäädäntö kieltää nykyään hehku-lamppujen myymisen). Kaikkien kolmen lampun kestoajat ovat toisistaan riippumattomia ja noudattavat eksponenttijakaumaa odotusarvolla 10000 tuntia. Sytytetään kaikki lamput yhtä aikaa.

(a) Mikä on todennäköisyys, että kaikki lamput palavat yli 20000 tuntia?

(b) Mikä on todennäköisyys, että ainakin yksi lampuista palaa yli 20000 tuntia?

3.

(a) Määritä vakio $c \in \mathbb{R}$ siten, että funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} c|x|, & \text{kun } x \in [-2, 2] \\ 0, & \text{muuten,} \end{cases}$$

on jonkin satunnaismuuttujan tiheysfunktio.

(b) Olkoon X satunnaismuuttuja, jonka tiheysfunktio on f . Mikä on X :n kertymäfunktio?

4. Kurssikokeeseen tulijoiden määrä noudattaa Poisson-jakaumaa odotusarvolla 80. Luentosalissa on 85 paikkaa. Laske normaaliaprossimaatiota (jatkuvuuskorjauksella) käyttäen todennäköisyys, että kokeeseen tulijoita on enemmän kuin luentosalissa paikkoja.

Kaavoja

- Binomikerroin:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Multinimikerroin:

$$\binom{n}{n_1 n_2 \dots n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

- Ehdollinen todennäköisyys ($P(B) > 0$):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Kokonaistodennäköisyyden kaava (B_1, \dots, B_n on perusjoukon ositus):

$$P(A) = \sum_{j=1}^n P(A|B_j)P(B_j)$$

- Bayesin kaava (B_1, \dots, B_n on perusjoukon ositus):

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A|B_j)P(B_j)}$$

- Diskreetin satunnaismuuttujan odotusarvo:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f(x_k)$$

- Jatkuvan satunnaismuuttujan odotusarvo:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

- Satunnaismuuttujan varianssi:

$$\text{var}(X) = E([X - E(X)]^2) = E(X^2) - E(X)^2$$

- Satunnaismuuttujien kovarianssi:

$$\text{Cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- Satunnaismuuttujien korrelaatio:

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X) \text{var}(Y)}}$$

- Markovin epäyhtälö ($X \geq 0$, $E(X)$ olemassa):

$$P\{X \geq a\} \leq \frac{E(X)}{a} \quad \text{kaikille } a > 0$$

- Tšebyševin epäyhtälö ($0 < \sigma^2 = \text{var}(X) < \infty$):

$$P\{|X - \mu| \geq k\sigma\} \leq \frac{1}{k^2} \quad \text{kaikille } k > 0$$

- Heikko suurten lukujen laki ($X_1, X_2, \dots \perp, \mu = E(X_i), \text{var}(X_i) < \infty$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\bar{X}_n - \mu| \geq \epsilon\} = 0 \quad \text{kaikille } \epsilon > 0.$$

- Keskeinen raja-arvolause $X_1, X_2, \dots \perp$ samoin jakautuneita, $\mu = E(X_i), \text{var}(X_i) < \infty$):

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

- Normaaliapproksimaatio standardoidulle keskiarvolle:

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma \approx N(0, 1).$$

tai standardoidulle summalle:

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \approx N(0, 1).$$

Diskreettejä jakaumia

Jakauma	Arvojoukko	Parametrit	Ptnf $f_X(k)$	$E(X)$	$\text{var}(X)$
Bernoulli(p)	$\{0, 1\}$	$p \in (0, 1)$	$p^k(1-p)^{1-k}$	p	$p(1-p)$
Bin(n, p)	$\{0, 1, \dots, n\}$	$n \in \mathbb{N}^+, p \in (0, 1)$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Geom(p)	$\{0, 1, 2, \dots\}$	$p \in (0, 1)$	$p(1-p)^k$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poisson(λ)	$\{0, 1, 2, \dots\}$	$\lambda > 0$	$e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ
Hyperg(N, K, n)	$\{0, 1, \dots, n\}$	$N, K, n \in \mathbb{N}^+, n \leq N, K \leq N$	$\frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$n \cdot \frac{K}{N}$	$n \cdot \frac{K}{N} \cdot \frac{N-K}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}$

Jatkuvia jakaumia

Jakauma	Arvojoukko	Parametrit	Tf $f_X(x)$	$E(X)$	$\text{var}(X)$
Tas(a, b)	(a, b)	$a, b \in \mathbb{R}, a < b$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{1}{2}(a+b)$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exp(λ)	$(0, \infty)$	$\lambda > 0$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$N(\mu, \sigma^2)$	\mathbb{R}	$\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

Standardinormaalijakauman kertymäfunktion arvoja

Standardinormaalijakauman kertymäfunktion Φ arvoja, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990