Todennäköisyyslaskenta I, kesä 2017
Harjoitus 4 – Ratkaisuehdotuksia

1. Satunnaismuuttujalla X on ns. kaksipuolinen eksponenttijakauma eli Laplacen jakauma: sen tiheysfunktio on

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

(a) Piirrä tiheysfunktio.

(b) Tarkista integroimalla, että kyseessä on todella tiheysfunktio.

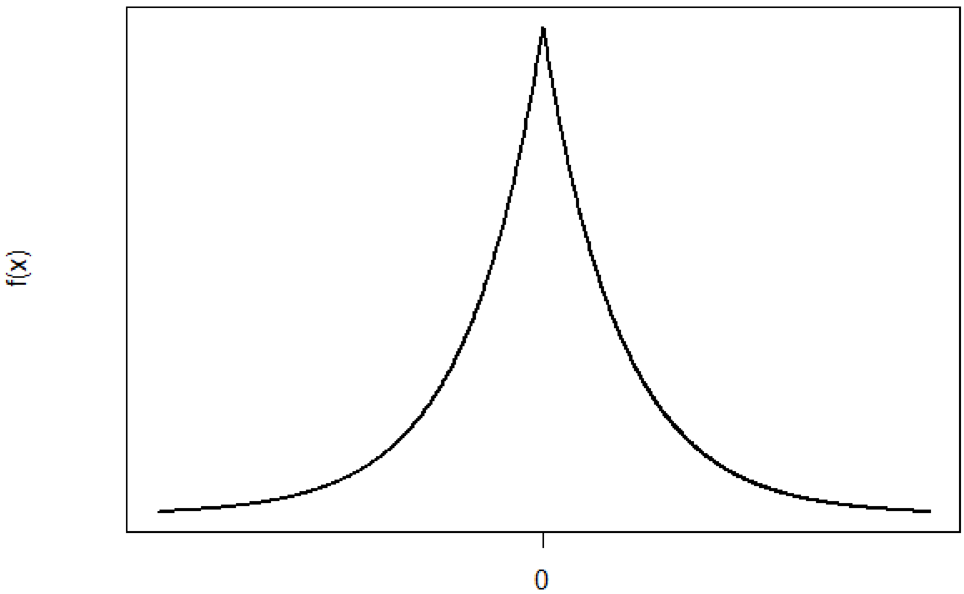
(c) Laske $E(X)$.

(Vihje: Voit käyttää osittaisintegrointia, tai hyödyntää jakauman symmetrisyyttä origon suhteen.)

(d) Laske $P(|X| > 2)$.

Ratkaisu:

(a) Satunnaismuuttujan X tiheysfunktio näyttää suurin piirtein seuraavalta:



(b) Integroimalla saadaan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}e^{-|x|}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{x}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}(1+1) = 1.$$

(c) Jatkuvan satunnaismuuttujan odotusarvo $E(X)$ saadaan laskemalla integraali $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x$.

Tapa 1 (osittaisintegrointi):

Osittaisintegroinnin kaava: $\int_a^b f'g\,\mathrm{d}x = \Big/_a^b fg - \int_a^b g'f\,\mathrm{d}x$.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big(\int_{-\infty}^{0} xe^{x}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x\Big)$$

Ensimmäisessä integraalissa valitaan $g = x$ ja $f' = e^x$, jolloin osittaisintegroinnin kaavaa hyödyntämällä saadaan

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{x}\,\mathrm{d}x = \Big/_{-\infty}^{0} e^{x}x - \int_{-\infty}^{0} e^{x}\,\mathrm{d}x = 0 - (e^0 - 0) = -1.$$

Huomautus: edellä on oiottu ja laskettu, että $e^{-\infty} \cdot -\infty = 0$. Formaalisti tämä tulisi tehdä raja-arvotarkastelulla.

Toisessa integraalissa valitaan $g = x$ ja $f' = e^{-x}$, jolloin osittaisintegroinnin kaavaa hyödyntämällä saadaan

$$\int_{0}^{\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x = \Big/_{0}^{\infty} -e^{-x}\cdot x - \int_{0}^{\infty} -e^{-x}\,\mathrm{d}x = 0 - (e^{-\infty} - e^{0}) = 1.$$

Myös tässä on oiottu ja laskettu, että $-e^{-\infty} \cdot \infty = 0$.

Näin ollen saadaan

$$E(X) = \frac{1}{2}(-1+1) = 0.$$

Tapa 2 (Muuttujanvaihto):

Merkitään $u = -x$, jolloin $\mathrm{d}u = -\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big(\int_{-\infty}^{0} xe^{x}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\int_{-\infty}^{0} xe^{x}\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{0} ue^{u}\,\mathrm{d}u\Big) = 0 \end{aligned}$$

Huomaa integraalin muuttuvat rajat sijoituksessa $u = -x$. Viimeinen yhtäsuuruus johtuu siitä, että ensimmäinen ja toinen integraali ovat samat, joten niiden erotus on 0.

(d)

$$\begin{aligned} P(|X| > 2) &= 1 - P(|X| \le 2) = 1 - 2 \cdot P(0 \le X \le 2) \\ &= 1 - 2\int_0^2 \frac{1}{2}e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1 - (-e^{-2} + e^{0}) \\ &= \frac{1}{e^2} \end{aligned}$$

2. Tarkastellaan seuraavaa peliä (vrt. luentojen esimerkki 2.37 tai Tuomisen esim. 2.2.5.): heitetään kolikkoa, kunnes saadaan ensimmäinen kruuna. Pelaaja voittaa 2^k dukaattia, missä k on heittojen määrä. Oletetaan tällä kertaa kuitenkin, että kasinon varat ovat rajalliset: pelaajan voittosumma yhdellä kierroksella on 2^{20} (reilu miljoona) dukaattia kaikille $k \ge 20$. Kuinka paljon yllä kuvatusta pelistä kannattaa tällöin korkeintaan maksaa?

Ratkaisu: Kasino voi maksaa yhdellä kierroksella korkeintaan $2^{20} = 1\,048\,576$ dukaattia, eli tilanteessa, jossa pelaaja onnistuu heittämään kolikkoa vähintään 20 kertaa. Merkitään luentomuistiinpanojen esimerkin tapaan pelistä saatavaa voittoa satunnaismuuttujalla X, jonka arvojoukko on tällä kertaa $\{2, 4, 8, \ldots, 2^{19}, 2^{20}\}$, koska voitolle on nyt asetettu yläraja. X:n pistetodennäköisyydeksi saadaan

$$P\{X = 2^k\} = \frac{1}{2^k} \text{ kaikilla } k = 1, 2, \ldots, 19$$

ja

$$P\{X = 2^{20}\} = \sum_{k=20}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+20}}$$

Ylläoleva sarja on suppeneva geometrinen sarja ja sen summa on

$$\frac{\frac{1}{2^{20}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{19}}.$$

Siis $P\{X = 2^{20}\} = \frac{1}{2^{19}}$ ja voitolle saadaan siten odotusarvo

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f(x_k) = \sum_{k=1}^{19} \left(\frac{1}{2^k} \cdot 2^k \right) + \frac{1}{2^{19}} \cdot 2^{20} = 19 + 2 = 21.$$

Näin ollen pelistä kannattaa maksaa korkeintaan 21 dukaattia.

3. Kahden riippumattoman Tas(0,1)-satunnaismuuttujan (esim. X ja Y) summa on Z. Tiedetään (vrt. Tuominen s. 72), että Z:llä on tiheysfunktio

$$\begin{aligned} f(z) = \quad & z, \qquad \text{kun } 0 < z \leq 1, \\ & 2 - z, \qquad \text{kun } 1 < z < 2, \\ & 0 \qquad \text{muualla.} \end{aligned}$$

Laske $E(Z)$ ja $P(0.5 < Z < 1.5)$.

Ratkaisu: Tiedetään, että Tas$(0, 1)$-jakaumaa noudattavan satunnaismuuttujan odotusarvo on $\frac{1}{2}$ (Tuominen 2.4.3 (i)). Koska $Z = X + Y$, niin odotusarvon lineaarisuuden perusteella

$$E(Z) = E(X + Y) = E(X) + E(Y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Odotusarvon voi toki myös ratkaista "tyylikkäästi" integroimalla:

$$\begin{aligned} E(Z) &= \int_{-\infty}^{\infty} z f(z)\, \mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{0} z f(z)\, \mathrm{d}z + \int_{0}^{1} z f(z)\, \mathrm{d}z + \int_{1}^{2} z f(z)\, \mathrm{d}z + \int_{2}^{\infty} z f(z)\, \mathrm{d}z \\ &= \int_0^1 z^2\, \mathrm{d}z + \int_1^2 2z - z^2\, \mathrm{d}z = \Big/_{0}^{1} \frac{1}{3} z^3 + \Big/_{1}^{2} z^2 - \frac{1}{3} z^3 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \end{aligned}$$

Lisäksi

$$\begin{aligned} P(0.5 < Z < 1.5) &= \int_{0.5}^{1.5} f(z)\, \mathrm{d}z = \int_{0.5}^{1} z\, \mathrm{d}z + \int_{1}^{1.5} 2 - z\, \mathrm{d}z \\ &= \Big/_{0.5}^{1} \frac{1}{2} z^2 + \Big/_{1}^{1.5} 2z - \frac{1}{2} z^2 \\ &= 0.5 - 0.125 + 1.1875 - 1.5 = 0.75 \end{aligned}$$

4. Tarkastellaan peliä, jossa pelaaja heittää kahta noppaa. Jos ensimmäisellä kierroksella pelaaja heittää silmälukujen summaksi 7 tai 11, hän voittaa dollarin ja peli loppuu. Jos taas silmälukujen summa on 2,3, tai 12, peli loppuu ja pelaaja ei voita mitään. Jos silmälukujen summa ei ole kumpikaan näistä, pelaaja jatkaa heittämistä, kunnes hän joko heittää silmälukujen summaksi 7, jolloin peli loppuu ja pelaaja ei voita mitään, tai heittää uudelleen saman silmälukujen summan kuin ensimmäisellä kierroksella, jolloin hän voittaa yhden dollarin ja peli loppuu.

Mikä on pelaajan voiton odotusarvo yhdellä pelikerralla (kun heitetään siihen asti että peli loppuu)? Kannattaako tästä pelistä maksaa yhtä dollaria?

Ratkaisu: Tehtävässä on ensin selvitettävä voiton todennäköisyys, joten käydään läpi kaikki mahdolliset tavat, joilla pelaaja voi voittaa. Ensinnäkin

$$P(\text{"pelaaja voittaa 1. kierroksella"}) = P(\text{"1. heiton summa 7 tai 11"}) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

Silmälukujen summien 4, 5, 6, 8, 9 ja 10 todennäköisyydet jokaisella kierroksella ovat

$$\begin{aligned}
P(\text{"summa on 4"}) &= \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \\
P(\text{"summa on 5"}) &= \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \\
P(\text{"summa on 6"}) &= \frac{5}{36} \\
P(\text{"summa on 8"}) &= \frac{5}{36} \\
P(\text{"summa on 9"}) &= \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \\
P(\text{"summa on 10"}) &= \frac{3}{36} = \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

Mikäli et ole vakuuttunut ylläolevista todennäköisyyksistä, niin piirrä taulukko, jossa on lueteltuina kaikki 36 mahdollista kahden nopan summaa.

Tarkastellaan tilannetta, jossa pelaaja on heittänyt ensimmäisellä kierroksella summaksi x, missä x on 4, 5, 6, 8, 9 tai 10. Tällöin päättyy tappioon, jos pelaaja heittää seiskan ja voittoon jos pelaaja heittää uudestaan ensimmäisen kierroksen summan. Muuten nopanheittoa jatketaan. Todennäköisyys sille, että nopanheitto jatkuu vielä seuraavalle kierrokselle, on yhtä kuin todennäköisyys sille, että pelaaja ei heitä seiskaa tai ensimmäisen kierroksen summaa. Eri x:n arvoilla pelin jatkumisen todennäköisyydet ovat

$$P(\text{"heittäminen jatkuu"}|x = 4) = P(\text{"summa ei ole 4 eikä 7"}) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$$

$$P(\text{"heittäminen jatkuu"}|x = 5) = P(\text{"summa ei ole 5 eikä 7"}) = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$$

$$P(\text{"heittäminen jatkuu"}|x = 6) = P(\text{"summa ei ole 6 eikä 7"}) = \frac{25}{36}$$

$$P(\text{"heittäminen jatkuu"}|x = 8) = P(\text{"summa ei ole 8 eikä 7"}) = \frac{25}{36}$$

$$P(\text{"heittäminen jatkuu"}|x = 9) = P(\text{"summa ei ole 9 eikä 7"}) = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$$

$$P(\text{"heittäminen jatkuu"}|x = 10) = P(\text{"summa ei ole 10 eikä 7"}) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$$

Voit jälleen vakuuttua ylläolevista todennäköisyyksistä piirtämällä taulukon :)

Merkitään tapahtumalla V_i sitä, että pelaaja voittaa heitettyään ensimmäisellä heitollaan summaksi i:n ($i = 4, 5, 6, 8, 9, 10$). Esimerkiksi tapahtuman V_4 tapahtuminen tarkoittaa, että pelaaja heittää ensimmäisellä heitollaan nelosen ja seuraavan nelosen joko toisella, kolmannella, neljännellä jne. kuitenkin niin, että pelaaja ei heitä seiskaa millään heitolla.

Todennäköisyydet näille tapahtumille ovat:

$$\begin{aligned}
P(V_4) = P(V_{10}) &= \frac{1}{12}\left(\frac{1}{12} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{12} + \left(\frac{3}{4}\right)^2\frac{1}{12} + \left(\frac{3}{4}\right)^3\frac{1}{12} + \dots\right) \\
&= \frac{1}{144}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{1}{144}\left(\frac{1}{1-\frac{3}{4}}\right) = \frac{1}{144}\cdot 4 = \frac{1}{36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(V_5) = P(V_9) &= \frac{1}{9}\left(\frac{1}{9} + \frac{13}{18}\cdot\frac{1}{9} + \left(\frac{13}{18}\right)^2\frac{1}{9} + \left(\frac{13}{18}\right)^3\frac{1}{9} + \dots\right) \\
&= \frac{1}{81}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{13}{18}\right)^k = \frac{1}{81}\left(\frac{1}{1-\frac{13}{18}}\right) = \frac{1}{81}\cdot\frac{18}{5} = \frac{2}{45}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(V_6) = P(V_8) &= \frac{5}{36}\left(\frac{5}{36} + \frac{25}{36}\cdot\frac{5}{36} + \left(\frac{25}{36}\right)^2\frac{5}{36} + \left(\frac{25}{36}\right)^3\frac{5}{36} + \dots\right) \\
&= \frac{25}{1296}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{25}{36}\right)^k = \frac{25}{1296}\left(\frac{1}{1-\frac{25}{36}}\right) = \frac{25}{1296}\cdot\frac{36}{11} = \frac{25}{396}
\end{aligned}$$

Ylläolevien sarjojen summat on laskettu geometrisen sarjan summakaavalla. Nyt kaikki mahdolliset voittotodennäköisyydet on laskettu (voitto ensimmäisellä heitolla ja tapahtumat V_i, joten

$$P(\text{"Pelaaja voittaa dollarin"}) = \frac{2}{9} + \frac{1}{36} + \frac{2}{45} + \frac{25}{396} + \frac{25}{396} + \frac{2}{45} + \frac{1}{36} = \frac{244}{495} \approx 0.49$$

Koska kaikissa muissa tapauksissa pelaaja häviää, niin

$$P(\text{"Pelaaja häviää"}) = 1 - \frac{244}{495} = \frac{251}{495}$$

Jos pelaaja sijoittaa peliin yhden dollarin, niin pelaajan voittoa kuvaavan satunnaismuuttujan X odotusarvo on (negatiivinen voitto tarkoittaa tappiota)

$$E(X) = \frac{244}{495}\cdot 1 + \frac{251}{495}\cdot(-1) = -\frac{7}{495} \approx -0.014$$

Pelistä ei täten kannata maksaa yhtä dollaria, sillä pitkällä aikavälillä pelaaja jäisi tappiolle.

5. Olkoot satunnaismuuttujat X, Y ja Z riippumattomia, joilla kaikilla on sama odotusarvo μ ja varianssi σ^2. Laske odotusarvo ja varianssi satunnaismuuttujille

(a) $2X + 3$,

(b) $X - Y$,

(c) $X - \frac{1}{2}Y$,

(d) $X + 2Y + 3Z$,

(e) XY,

(f) XYZ.

Ratkaisu:

(a) Odotusarvon lineaarisuuden nojalla (Tuominen, lause 3.1.1 (i))

$$E(2X + 3) = 2E(X) + 3 = 2\mu + 3.$$

Varianssin laskusääntöjen nojalla (Tuominen, lause 3.2.5)

$$D^2(2X + 3) = 2^2 D^2(X) = 4\sigma^2$$

(b) Odotusarvon lineaarisuuden nojalla

$$E(X - Y) = E(X) - E(Y) = \mu - \mu = 0.$$

Riippumattomuuden ja varianssin laskusääntöjen nojalla

$$D^2(X-Y) = D^2(X+(-Y)) = D^2(X)+D^2(-Y) = D^2(X)+(-1)^2 D^2(Y) = \sigma^2+\sigma^2 = 2\sigma^2.$$

(c) Odotusarvon lineaarisuuden nojalla

$$E\left(X - \frac{1}{2}Y\right) = E(X) - \frac{1}{2}E(Y) = \mu - \frac{1}{2}\mu = \frac{1}{2}\mu.$$

Riippumattomuuden ja varianssin laskusääntöjen nojalla

$$D^2\left(X - \frac{1}{2}Y\right) = D^2(X) + D^2\left(-\frac{1}{2}Y\right) = D^2(X) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 D^2(Y) = \sigma^2 + \frac{1}{4}\sigma^2 = \frac{5}{4}\sigma^2.$$

(d) Odotusarvon lineaarisuuden nojalla

$$E(X + 2Y + 3Z) = E(X) + 2E(Y) + 3E(Z) = \mu + 2\mu + 3\mu = 6\mu.$$

Riippumattomuuden ja varianssin laskusääntöjen nojalla

$$D^2(X + 2Y + 3Z) = D^2(X) + 2^2 D^2(Y) + 3^2 D^2(Z) = \sigma^2 + 4\sigma^2 + 9\sigma^2 = 14\sigma^2.$$

(e) Riippumattomuuden nojalla

$$E(XY) = E(X)E(Y) = \mu^2$$

Hyödyntämällä Tuomisen lausetta 3.2.3 ja X:n ja Y:n riippumattomuutta saadaan

$$\begin{aligned}
D^2(XY) &= E((XY)^2) - (E(XY))^2 = E(X^2Y^2) - (\mu^2)^2 \\
&= E(X^2)E(Y^2) - \mu^4 \\
&= (D^2(X) + (E(X))^2)((D^2(Y) + (E(Y))^2) - \mu^4 \\
&= (\sigma^2 + \mu^2)(\sigma^2 + \mu^2) - \mu^4 \\
&= \sigma^4 + 2\sigma^2\mu^2
\end{aligned}$$

(f) Riippumattomuuden nojalla

$$E(XYZ) = E(X)E(Y)E(Z) = \mu^3$$

Kuten edellisessä kohdassa

$$\begin{aligned}
D^2(XYZ) &= E((XYZ)^2) - (E(XYZ))^2 = E(X^2Y^2Z^2) - (\mu^3)^2 \\
&= E(X^2)E(Y^2)E(Z^2) - \mu^6 \\
&= (D^2(X) + (E(X))^2)(D^2(Y) + E(Y))^2)(D^2(Z) + E(Z))^2) - \mu^6 \\
&= (\sigma^2 + \mu^2)^3 - \mu^6 \\
&= (\sigma^2)^3 + 3(\sigma^2)^2\mu^2 + 3\sigma^2(\mu^2)^2 + (\mu^2)^3 - \mu^6 \\
&= \sigma^6 + 3\sigma^4\mu^2 + 3\sigma^2\mu^4
\end{aligned}$$

6. Painotettua kolikkoa, jossa kruunan todennäköisyys on $p = 1/3$, heitetään n kertaa. Olkoon Y kruunien lukumäärä ja $X = Y/n$ kruunien suhteellinen frekvenssi. Laske X:n odotusarvo, varianssi ja keskihajonta.

Ratkaisu: Koska kyseessä on n:n riippumattoman tapahtuman toistokoe, niin satunnaismuuttuja $Y \sim \text{Bin}(n, 1/3)$. Täten $E(Y) = n \cdot \frac{1}{3} = \frac{n}{3}$ ja $D^2(Y) = n \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2n}{9}$

Nyt $E(X) = E(Y/n) = \frac{1}{n}E(Y) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{3} = \frac{1}{3}$,
$D^2(X) = D^2(Y/n) = (\frac{1}{n})^2 D^2(Y) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{2n}{9} = \frac{2}{9n}$ ja
$D(X) = \sqrt{D^2(X)} = \sqrt{\frac{2}{9n}}$.

7. Jatkoa edelliseen. Olkoon $\epsilon = 0.01$. Toivomme, että X olisi ϵ:n tarkkuudella likiarvo oikealle todennäköisyydelle, ts. toivomme, että toteutuu epäyhtälö $|X - p| < \epsilon$. Sen komplementtitapahtumaa $|X - p| \geq \epsilon$ kutsumme *liian suureksi virheeksi*, ja merkitään kirjaimella L. Laske Tsebysevin epäyhtälön (Tuomisen kirjassa lause 3.2.8 sivu 85) perusteella yläraja todennäköisyydelle $P(L)$.

Ratkaisu: $\mu = E(X) = \frac{1}{3} = p$. Nyt

$$P(L) = P(|X - p| \geq 0.01) = P\Bigg(|X - p|) \geq \underbrace{0.01\sqrt{\frac{9n}{2}}}_{k} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{2}{9n}}}_{\sigma}\Bigg) \leq \frac{1}{k^2} = \frac{2}{0.0009n}$$

8. Kuinka suuri on n:n oltava, jotta Tsebysevin epäyhtälön nojalla $P(L) < 0.05$?

Ratkaisu: Ratkaistaan epäyhtälö

$$\begin{aligned}
\frac{2}{0.0009n} &< 0.05 \\
\Leftrightarrow n &> \frac{2}{0.0009n}\Big/0.05 \\
\Leftrightarrow n &> 44444.4
\end{aligned}$$

Siis heittojen lukumäärän on oltava vähintään 44 445.

9. Koetta, jossa heitetään kuutta arpakuutiota, toistetaan 5000 kertaa. Tarkastellaan tapahtuman A = "kaikki kuusi noppaa osoittavat eri pistelukua" esiintymistä. Laske normaaliapproksimaatiolla tn, että A esiintyy toistokokeessa yli 80 kertaa.

Ratkaisu: Olkoon satunnaismuuttuja X, joka kuvaa A:n tapahtumiskertojen lukumäärää. Koska kyseessä on 5000:n riippumattoman tapahtuman toistokoe, niin $X \sim \text{Bin}(5000, p)$, missä $p = P(A)$.

Lasketaan tapahtuman A todennäköisyys yksittäisessä kuuden nopan heitossa. Kaikkiaan erilaisia kuuden nopan jonoja on $6^6 = 46\ 656$ kappaletta. Tapahtumalle A suotuisia jonoja (eli jonoja, joissa kaikki nopat ovat eri silmälukua) on $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$ kappaletta. Näin ollen $P(A) = \frac{6!}{6^6}$.

On selvitettävä todennäköisyys $P(X > 80)$. Tehtävänannon mukaisesti käytetään normaaliapproksimaatiota. Tätä varten on ensin selvitettävä X:n odotusarvo ja keskihajonta. Käytetään hyväksi tietoja binomijakauman tunnusluvuista.

$$E(X) = np = 5000 \cdot \frac{6!}{6^6}$$

$$D(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{5000 \cdot \frac{6!}{6^6} \cdot \left(1 - \frac{6!}{6^6}\right)}$$

Tuomisen kirjan lauseen 4.2.1 mukaan $Z := \frac{X - E(X)}{D(X)} \sim \mathrm{N}(0, 1)$. Siis

$$\begin{aligned}
P(X > 80) &= 1 - P(X \leq 80) \\
&= 1 - P(X \leq 80.5) \text{ (jatkuvuuskorjaus)} \\
&\approx 1 - P\left(Z \leq \frac{80.5 - E(X)}{D(X)}\right) \\
&\approx 1 - P(Z \leq 0.383) \\
&= 1 - \Phi(0.383) \\
&= 1 - 0.6491 \\
&\approx 0.35
\end{aligned}$$

Siis noin todennäköisyydellä 0.35 tapahtuma A esiintyy toistokokeessa yli 80 kertaa.

10. Herra K odottaa bussia. Pysäkiltä kulkee kolme eri bussilinjaa A, B ja C, ja herra K voi yhtä hyvin matkustaa millä tahansa niistä. Bussit kulkevat satunnaisesti: kunkin bussin saapumisaika on tasajakautunut välillä $(0, 8)$, toisista busseista riippumatta. 0 tarkoittaa hetkeä, jolloin K saapui pysäkille.

(a) Mikä on tn, että yksikään busseista ei saavu ensimmäisten neljän minuutin aikana?

(b) Mikä on tn, että yksikään busseista ei saavu ensimmäisten k minuutin aikana (kun k on jokin reaaliluku välillä $[0, 8]$)?

(c) Olkoon X se hetki, jolloin ensimmäinen busseista saapuu, ts. herra K:n odotusaika. Määritä X:n kertymäfunktio ja tiheysfunktio.

Ratkaisu: Merkitään bussien saapumisaikoja satunnaismuuttujilla A, B ja C.
Nyt $A, B, C \sim \mathrm{Tas}(0, 8)$

(a)

$$\begin{aligned}
&P(\text{"yksikään bussi ei saavu ensimmäisen neljän minuutin aikana"}) \\
&= P(A > 4)P(B > 4)P(C > 4) \text{ (riippumattomuus)} \\
&= (1 - P(A \leq 4))(1 - P(B \leq 4))(1 - P(C \leq 4)) \\
&= \left(1 - \frac{4}{8}\right)\left(1 - \frac{4}{8}\right)\left(1 - \frac{4}{8}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\
&= \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
&P(\text{"yksikään bussi ei saavu ensimmäisen k minuutin aikana"}\\
&= P(A > k)P(B > k)P(C > k) \text{ (riippumattomuus)}\\
&= \left(1 - \frac{k}{8}\right)\left(1 - \frac{k}{8}\right)\left(1 - \frac{k}{8}\right)\\
&= \left(1 - \frac{k}{8}\right)^3
\end{aligned}$$

(c) (b)-kohdassa laskettiin todennäköisyys $P(X > k)$. Tästä saadaan helposti laskettua X:n kertymäfunktio. Kun $0 \leq k \leq 8$, on

$$\begin{aligned}
F_X(k) &= P(X \leq k)\\
&= 1 - P(X > k)\\
&= 1 - \left(1 - \frac{k}{8}\right)^3.
\end{aligned}$$

Kun $k < 0$, kertymäfunktio saa arvon nolla, ja kun $k > 8$, kertymäfunktio saa arvon 1.

X:n tiheysfunktion voi ratkaista derivoimalla kertymäfunktiota k:n suhteen. Näin ollen kun $0 \leq k \leq 8$, on

$$\begin{aligned}
f_X(k) &= -3\left(1 - \frac{k}{8}\right)^2\left(-\frac{1}{8}\right)\\
&= \frac{3}{8}\left(1 - \frac{k}{8}\right)^2.
\end{aligned}$$

Muualla tiheysfunktio saa arvon nolla.