1. Merkitään $A=$ "valitaan ruudullinen paita", $B_i=$ "valitaan i:s kaappi"

a) $P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)=\frac{6}{11}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{16}\cdot\frac{1}{2}=\frac{6}{22}+\frac{4}{32}=0{,}397$

b) Merk. $C=$ "valitaan kolme ruudullista putkeen". Nyt riippumat. nojalla

$$P(C)=P(C|B_1)P(B_1)+P(C|B_2)P(B_2)$$
$$=\frac{6}{11}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{16}\cdot\frac{3}{15}\cdot\frac{2}{14}\cdot\frac{1}{2}=\frac{120}{990}+\frac{12}{3360}.$$

Bayes: $$P(B_1|C)=\frac{P(B_1)P(C|B_1)}{P(C)}=\frac{\frac{120}{990}}{\frac{120}{990}+\frac{12}{3360}}\approx 0{,}97$$

2. a) Merk. $A_i=$ "i:s lamppu palaa yli 20000 h". $P(A)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)$, koska riippumattomia. Ol. X lampun palamisaika (tunneissa)

$$P(A_i)=P(X\geq 20000)=1-P(X<20000)=1-\int_{-\infty}^{20000}\lambda e^{-\lambda x}\,dx$$
$$=1-(1-e^{-\lambda 20000})$$
$$=e^{-2}.$$

Edelleen, $P(A)=P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_i)^3=e^{-6}\approx 0.00248$

b) $P(\text{"ainakin yksi yli 20000"})=1-P(\text{"ei yksikään yli 20000"})$
$$=1-P(X<20000)^3$$
$$=1-(1-e^{-20000\lambda})^3\approx 0.3535$$

3. a) $f(x)\geq 0\ \forall x$, joten riittää osoittaa, että $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=1$.

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=\int_{-2}^{2}c|x|\,dx=c\left(\int_{-2}^{0}-x\,dx+\int_{0}^{2}x\,dx\right)$$

Huom! $|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$

$$=c\left(-\frac{1}{2}\Big/_{-2}^{0}x^2+\frac{1}{2}\Big/_{0}^{2}x^2\right)=c(-(-2)+2)=c\,4$$

$\iff c=\frac{1}{4}$, jotta $\int f(x)=1$.

b) $$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt=\int_{-2}^{x}\frac{1}{4}|t|\,dt$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{4}\int_{-2}^{x}-t\,dt, & \text{jos } x<0\\ \frac{1}{4}\left(\int_{-2}^{0}-t\,dt+\int_{0}^{x}t\,dt\right), & \text{jos } x\geq 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-\frac{1}{8}\Big/_{-2}^{x}t^2=-\frac{1}{8}(x^2-4), & \text{jos } x<0\\ \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\Big/_{-2}^{0}t^2+\frac{1}{2}\Big/_{0}^{x}t^2\right)=\frac{1}{4}\left(+2+\frac{1}{2}x^2\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}x^2, & x\geq 0.\end{cases}$$