Institutionen för matematik och statistik

Differentialkalkyl
Räkneövningar

Torsdag 25.1.2018

1. Funktionen $f\colon [0,4] \to \mathbb{R}$ definieras på följande sätt:

$$f(x) = \begin{cases} -x+1, & 0 \le x \le 1, \\ x^2 - 1, & 1 < x < 2, \\ x, & 2 \le x \le 4,\ x \ne 3, \\ 1, & x = 3. \end{cases}$$

   Rita funktionens graf och avgör på basen av denna i vilka punkter funktionen är

   (a) vänsterkontinuerlig,
   (b) högerkontinuerlig,
   (c) kontinuerlig,
   (d) inte kontinuerlig.

2. Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieras på följande sätt:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{för } x < 0, \\ x, & \text{för } x \ge 0. \end{cases}$$

   Visa medelst definitionen på kontinuitet, att f är kontinuerlig i origo.

3. Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieras på följande sätt:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{för } x \le 2, \\ 1, & \text{för } x > 2. \end{cases}$$

   Visa medelst definitionen på kontinuitet, att f är kontinuerlig i $x = 1$, men inte i $x = 2$.

4. Visa, att funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ är vänsterkontinuerlig i b om och endast om
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(b)$$
för alla föjder (x_n) för vilka $x_n \in [a,b]$ och $\lim_{n\to\infty} x_n = b$.

5. Låt A vara en delmängd till $\mathbb{R}$ och antag at $f : A \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig. Visa, att funktionen $g : A \to \mathbb{R}$ definierad genom $g(x) = |f(x)|$ för alla $x \in A$ också är kontinuerlig.