

## Institutionen för matematik och statistik

### Differentialkalkyl Räkneövningar

Måndag 5.2.2018

1. Vilka av följande funktioner är injektioner och vilka är surjektioner. Motivera.

$$f: [0, 2] \rightarrow [0, 1], \quad f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{för } x \geq 1, \\ 1 - x, & \text{för } x < 1. \end{cases} \quad (1)$$

$$g: [-1, 1] \rightarrow [0, 2], \quad f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{för } x < 0, \\ x^2, & \text{för } x \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

$$h: [0, 1] \rightarrow [-\frac{1}{4}, 0], \quad h(x) = x^2 - x. \quad (3)$$

2. Visa, att funktionen  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1/x$  är strängt avtagande.
3. Visa, att funktionen  $f$  definierad på  $(0, \infty)$  genom uttrycket

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad x \in (0, \infty)$$

är kontinuerlig och strängt avtagande. Bestäm funktionens värdemängd  $f((0, \infty))$ . Bestäm ett uttryck för den inversa funktionen  $f^{-1}$ . Är  $f^{-1}$  kontinuerlig?

4. Visa, att en strängt växande funktion är en injektion.
5. Vi vet att funktionen  $x \mapsto \sin x$  är definierad och kontinuerlig i hela  $\mathbb{R}$ . Visa, att  $x \mapsto \tan x = \sin x / \cos x$  är definierad i hela  $\mathbb{R}$  utom i ett uppräknligt antal punkter. Vilka? Visa också att funktionen  $x \mapsto \tan x$  är kontinuerlig i alla punkter i vilka den är definierad. Ange vilka resultat du använder i varje steg i ditt bevis.