Institutionen för matematik och statistik

Differentialkalkyl
Räkneövningar

Onsdag 7.2.2018

1. Betrakta funktionen $f : [0, \infty) \to [0, \infty), \quad f(x) = \sqrt{x},\ x \in [0, \infty)$. Visa, medelst definitionen på kontinuitet att f är kontinuerlig. Är den likformigt kontinuerlig? Använd definitionen på derivatan för att avgöra i vilka punkter f är deriverbar.

2. Betrakta funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 2,\ x \in \mathbb{R}$. Visa, att f är kontinuerlig. Visa (utan att derivera), att f är strängt avtagande i $(-\infty, 0]$ och strängt växande i $[0, \infty)$. Bestäm $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ och $f(0)$. Drag slutsatsen att f har precis två nollställen i $\mathbb{R}$. Vilka satser använde du?

3. Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieras så här:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

   Visa, att f är kontinuerlig. I vilka punkter är f deriverbar?

4. Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara kontinuerlig och definiera $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}$, $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Visa, att $f = f^+ - f^-$.
   (b) Visa, att f^+ och f^- är kontinuerliga.
   (c) Om f är deriverbar, följer det då att f^+ och f^- är deriverbara?

Torsdag 7.2.2018

1. Visa, att ekvationen $x^7 = x + 7$ har åtminstone en reell rot.

2. Låt $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ vara kontinuerlig och antag att $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to b-} f(x) = \infty$. Visa, att f uppnår sitt minsta värde i (a, b).

3. Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieras genom uttrycket

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + |x]}\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

   Visa, att f uppnår sitt största och sitt minsta värde i $\mathbb{R}$.

4. Låt $A \subset \mathbb{R}$ och antag att $f : A \to \mathbb{R}$ är likformigt kontinuerlig.

   (a) Visa, att om (x_n) är en Cauchyföljd i A så är också $(f(x_n))$ en Cauchyföljd.

   (b) Giv ett exempel på en kontinuerlig funktion f och en Cauchyföljd (x_n) för vilka $(f(x_n))$ *inte* är en Cauchyföljd. Enligt (a) kan en sådan funktion inte vara likformigt kontinuerlig.