

Institutionen för matematik och statistik

Differentialkalkyl Räkneövningar

Måndag 12.2.2018

1. Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definieras så här:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & x \leq 2, \\ x^2 - 6x + 9 + a & x > 2. \end{cases}$$

Bestäm de reella konstanterna a och b så att både f och f' är kontinuerliga i hela \mathbb{R} . Rita figur.

2. För varje positivt heltal $n \geq 2$ definieras funktionen $f_n : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ genom uttrycket $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$. Visa, att f_n inte är högerderiverbar i origo.
3. Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definieras så här:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Visa, att f är deriverbar.

4. Antag att funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uppfyller villkoret $|f(x)| \leq x^2$ för all $x \in \mathbb{R}$. Visa, att f är deriverbar i origo.

Tisdag 13.2.2018

1. Bestäm $f'(2)$ och $g'(2)$ då

$$f(x) = (3x^2 - 1)(2x^3 + 4x + 3) \quad \text{och} \quad g(x) = \frac{x^3 + x + 2}{2x^2 + 1}$$

2. Betrakta funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

Rita funktionens graf. På vilka intervall har f en invers funktion? Välj det intervall till vilket 4 hör och bestäm den inversa funktionen samt dennas derivata.

3. Använd mellanvärdessatsen till att bevisa att $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$ för alla $x > 0$.
4. Om funktionen $f : [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}$ vet man att $f(0) = 0$ och $-\frac{1}{2} < f'(x) < 1$ för alla $x \in [0, 10]$. Mellan vilka gränser ligger $f(10)$?