

## Institutionen för matematik och statistik

### Differentialkalkyl Räkneövningar

Onsdag 14.2.2018

1. Visa, att funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x < 0, \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

är deriverbar i hela  $\mathbb{R}$ . Visa, att  $f$  är strängt växande. Bestäm  $f$ :s inversa funktion. Är  $f$  deriverbar i hela  $\mathbb{R}$ ? Varför (inte)?

2. Antag att  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  har en höger- och vänsterderivata och att höger- och vänsterderivatan sammanfaller i varje punkt  $x \in \mathbb{R}$ . Följer det att  $f$  är deriverbar? Följer det att  $f$  är kontinuerlig? Motivera.
3. En funktion  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  är *Lipschitzkontinuerlig* om det finns ett sådant  $L > 0$  att

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

för alla  $x, y \in (a, b)$ .

- (a) Visa, att en Lipschitzkontinuerlig funktion är likformigt kontinuerlig i  $(a, b)$ .
- (b) Visa, att om  $f$  är deriverbar i  $(a, b)$  och om  $|f'(x)| \leq M < \infty$  för alla  $x \in (a, b)$  så är  $f$  Lipschitzkontinuerlig.
- (c) Giv ett exempel på en funktion som är deriverbar i  $(a, b)$  men som inte är Lipschitzkontinuerlig.
- (d) Giv ett exempel på en funktion som är Lipschitzkontinuerlig i  $(a, b)$  men som inte är deriverbar i  $(a, b)$ .

Torsdag 15.2.2018

1. Hur stort fel gör man om man använder närmevärdet  $\pi \approx 3.14$  då man räknar  $\sqrt{\pi}$ ?

2. Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definieras genom uttrycket  $f(x) = x^3 + x + 1$ . Hur stort fel gör man om man använder närmevärdet  $e \approx 2.7$  för att räkna  $f(e)$ ?
3. Visa, att funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definierad genom uttrycket  $f(x) = 2x^5 + 2x - 4$  har precis ett nollställe.
4. Låt funktionen  $f : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$  vara definierad genom  $f(x) = \sin x$ . Visa, att  $f$  är bijektiv och bestäm  $(f^{-1})'(x)$  för alla  $x \in [-1, 1]$ .