

## Institutionen för matematik och statistik

### Differentialkalkyl Räkneövningar

Måndag 19.2.2018

1. Derivera följande funktioner:

(a)  $x \mapsto 3 + \sin \sqrt[3]{x^2}$ ,

(b)  $x \mapsto \sqrt{1 - 2x + x^2}$ ,

(c)  $x \mapsto \arcsin x$  (arcus sinus är sinus inversa funktion).

2. Låt  $a > 0$ . Visa, att  $\frac{d}{dx}a^x = a^x \log x$ .

3. Funktionen  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  definieras  $f(x) = x^x$ . Bestäm  $f'(x)$  för alla  $x > 0$  samt

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$$

Torsdag 22.2.2018

1. Visa, att  $e^x \geq 1 + \sin x$  för alla  $x \geq 0$ .

2. Låt funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  vara kontinuerlig på  $[a, b]$  of deriverbar på  $(a, b)$ . Antag att  $f$  har fyra olika nollställen i  $[a, b]$ . Visa, att  $f'$  har minst tre olika nollställen i  $(a, b)$ . Generalisera resultatet till fallet där  $f$  har  $n$  nollställen i  $[a, b]$ .

3. Låt  $f(x) = x^3 + 1$ . Enligt mellanvärdessatsen finns det åtminstone en sådan punkt  $\xi \in (a, b)$  att

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

Ge tillräckliga och nödvändiga villkor på  $a, b \in \mathbb{R}$  för att det skall finnas precis en sådan punkt  $\xi$ .