



### Lisää tehtäviä raja-arvoista ja jatkuvuudesta

1. Olkoon  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 1, \\ -x + 3, & x > 1 \end{cases}$$

Piirrä funktion kuvaaja välillä  $[-1, 3]$ .

- (a) Tutki raja-arvon  $(\varepsilon, \delta)$ -määritelmän perusteella, onko  $f$ :llä raja-arvo pisteessä 1. Jos näin on, niin mikä raja-arvo on?  
(b) Tutki jatkuvuuden  $(\varepsilon, \delta)$ -määritelmän perusteella, onko  $f$  jatkuva pisteessä 1.

2. Olkoon  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2, & x < -1, \\ x, & x \geq -1 \end{cases}$$

Piirrä funktion kuvaaja välillä  $[-3, 1]$ .

- (a) Tutki toispuoleisen raja-arvon  $(\varepsilon, \delta)$ -määritelmän perusteella, onko  $f$ :llä toispuoleiset raja-arvot pisteessä  $-1$ . Jos näin on, niin mitä raja-arvot ovat?  
(b) Tutki kurssin lauseiden avulla, onko  $f$ :llä raja-arvo pisteessä  $-1$ .  
(c) Tutki jatkuvuuden  $(\varepsilon, \delta)$ -määritelmän perusteella, onko  $f$  jatkuva pisteessä  $-1$ .

3. (a) (HKK Tehtävä 3.2.12 osa) Määrittele raja-arvot

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

(b) Olkoon  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = x^3.$$

Määritä raja-arvot

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

4. (HKK Tehtävä 3.3.6) Olkoot  $a > 0$  ja  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \frac{a}{x}.$$

Osoita, että  $f$  on aidosti vähenevä.

5. Määritä funktioiden

(a)  $a(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 5}$ ,

(b)  $b(x) = \frac{x^{2/3}}{1 + x^4}$ ,

(c)  $c(x) = \left| \frac{x - 2}{x^2 - 2} \right|$ ,

(d)  $d(x) = \left| \frac{x \sin x}{x^2 + 2} \right|$

laajimmat määrittelyjoukot ja tutki funktioiden jatkuvuutta niissä. Käytä kurssin lauseita.

6. Millä vakion  $c$  arvoilla funktio  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} c^2x - 2c, & x \geq 2, \\ 12, & x < 2, \end{cases}$$

on jatkuva koko  $\mathbb{R}$ :ssä?

7. Osoita, että yhtälöllä  $x(x-1)^2 = 1$  on ratkaisu. Määritä ratkaisun likiarvo kahden desimaalin tarkkuudella.

8. Jaa funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = x^2 + 2x - 1,$$

määrittelyjoukko  $\mathbb{R}$  osiin siten, että vastaavilla funktion rajoittumilla on käänteisfunktiot. Määritä kyseisten käänteisfunktioiden lausekkeet.

9. Osoita, että

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^n = 0$$

kaikilla  $n \in \mathbb{N}_1$ .

10. (HKK Tehtävä 4.3.7) Olkoon  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuva funktio, jolle  $0 < f(x) < 1$  kaikilla  $x \in \mathbb{R}$ . Määritellään funktio  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  asettamalla

$$g(x) = \frac{f(x)}{1 + x^2}.$$

Osoita, että funktio  $g$  saavuttaa joukossa  $\mathbb{R}$  suurimman arvonsa.