



Lisää tehtäviä derivaatasta ja differentiaalilaskennan perustuloksista

1. Määritä funktion $f: [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^3 - 3x,$$

suurin ja pienin arvo.

2. Funktio f toteuttaa origon ympäristössä epäyhtälön

$$|f(x)| \leq x^2.$$

Osoita, että f :llä on derivaatta origossa, ja määritä sen arvo.

3. Funktio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ määritellään asettamalla

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{\sin x}, \quad \text{kun } x \neq 0,$$

ja

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

Määritä $f'(0)$.

4. Derivoi funktio $f(x) = 1 + \sin e^{kx}$.

5. Osoita, että funktion f ,

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

käänteisfunktion derivaatta on ∞ niillä arvoilla, jotka f saa f' :n nollakohdissa.

6. Funktiosta f tiedetään, että

$$f'(x) = 2 + \sin x + \cos x$$

ja että $f(0) = 0$. Määritä f .

7. Oletetaan, että $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on kasvava funktio. Osoita, että kiinteällä x :n arvolla erotusosamäärä

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

on h :n kasvava funktio \mathbb{R} :ssä.

8. Määritä R -säteisen pallon sisäänpiirretyistä ympyrälieriöistä se, jonka

- (a) tilavuus on suurin,
- (b) vaipan pinta-ala on suurin,
- (c) kokonaispinta-ala on suurin.

9. Olkoon $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & -2 \leq x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 2. \end{cases}$$

Määritä väliarvolauseessa esiintyvä piste $\xi \in (-2, 2)$.

10. Laske raja-arvot (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ ja (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.