

Vektorianalyysi I

MAT21003

Luennoitsija: Ritva Hurri-Syrjänen
Luentoajat: ti: 14:15-16:00, to: 12:15-14:00
Helsingin yliopisto

23. lokakuuta 2017

Sisältö

Luennot syyslukukaudella 2017	3
Esimakua	4
Kertaus	5
1 Euklidinen avaruus	6
1.1 Euklidinen avaruus \mathbb{R}^n	6
1.1.1 Karteesinen tulo	6
1.1.3 Vektoriavaruuksien \mathbb{R}^n	6
1.1.4 Avaruus \mathbb{R}^n on n -ulotteinen	6
1.1.5 Avaruuden \mathbb{R}^n sisätulo	7
1.1.8 Euklidinen normi ja euklidinen etäisyys	7
1.1.11 Topologisista käsitteistä avaruuden \mathbb{R}^n joukoille	8
1.1.14 Täydellinen metrinen avaruus	9
1.1.15 Joukon halkaisijan merkintä	9
1.2 Vektorifunktioista	9
1.2.2 Funktion graafin määrittely	10
1.2.5 Funktion tasa-arvojoukko	11
1.3 Jonot avaruudessa \mathbb{R}^n ja jonojen suppeneminen	11
1.3.1 Suppenemisen määrittely	12
1.3.3 Cauchy-ehto	12
2 Realiarvoiset vektorifunktiot	13
2.1 Raja-arvo	13
2.1.1 Raja-arvon määrittely	13
2.2 Jatkuvuus	15
2.2.1 Jatkuvuuden määrittely	15
3 Realiarvoisten vektorifunktioiden differentiaalilaskentaa avaruudessa \mathbb{R}^n	18
3.1 Realiarvoisten vektorifunktioiden osittaisderivaatoista	18
3.1.2 Kahden muuttujan funktion osittaisderivaattojen määrittely	19
3.1.10 Osittaisderivaatoista jatkoa	21
3.1.11 Osittaisderivaattojen geometrinen tulkinta	21
3.1.13 Korkeammista osittaisderivaatoista	23
3.1.15 Osittaisderivaatoista vektoriavaruudessa \mathbb{R}^n	23
3.2 Suunnatuista derivaatoista	24
3.2.2 Suunnatun derivaatan määrittely	24
3.3 Tangenttitasot ja lineaarinen approksimaatio	25
3.3.1 Tangenttitasoista	25
3.3.7 Kuvauksen approksimoinnista	28
3.4 Kertaus lineaarikuvauksista ja affiinikuvauksen määrittely	28
3.4.1 Linearikuvauksen määrittely	28
3.4.2 Linearikuvausta vastaava matriisi	28
3.4.3 Avaruuden \mathbb{R}^n vektorien esityksestä	28
3.4.4 Realiarvoista lineaarikuvausta vastaava vektori	29
3.4.7 Affiinikuvauksen määrittely (realiarvoisessa tapauksessa)	29
3.5 Gradientista	29

3.5.1	Gradientin määritelmä	29
3.6	Derivaatasta	30
3.6.1	Derivaatan määritelmä	30
3.6.2	Derivaattakuvauksen määritelmä	31
3.6.13	Jatkuvasti differentioituvista kuvauksista	34
3.6.14	Riittävät ehdot differentioituvuudelle	34
3.7	Derivoimissääntöjä	36
3.8	Ketjusääntö I	38
3.9	Ketjusääntö II	39
3.10	Suunnatun derivaatan maksimointi	40
3.11	Gradientin geometrinen merkitys	41
4	Reaaliarvoisten kuvausten korkeammat osittaisderivaatat ja lokaalit ääriarvot	45
4.1	Korkeammat osittaisderivaatat	45
4.1.1	Korkeampien osittaisderivaattojen määritelmä	45
4.1.3	C^k ja C^∞ -funktioiden määritelmät	45
4.2	Korkeammat differentiaalit	46
4.2.1	Korkeampien differentiaalien määritelmä	46
4.3	Taylorin kaava	48
4.3.1	Kertaus yhden muuttujan Taylorin kaavasta	48
4.3.4	Taylorin polynomin määritelmä	49
4.3.12	Taylorin polynomin tarkkuus- ja yksikäsitteisyyslause	50
4.4	Kriittiset pisteet ja lokaalit ääriarvot	51
4.4.1	Ääriarvojen määritelmä	51
4.4.11	Kriittisen pisteen ja satulapisteen määritelmä	54
4.4.13	Mahdollisten ääriarvopisteiden laadun etsiminen.	55
	Viitteet	62

Luennot syyslukukaudella 2017

Luennot sisältävät euklidisessa avaruudessa \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, määriteltyjen reaaliarvoisten vektorifunktioiden differentiaalilaskennan perusteita.

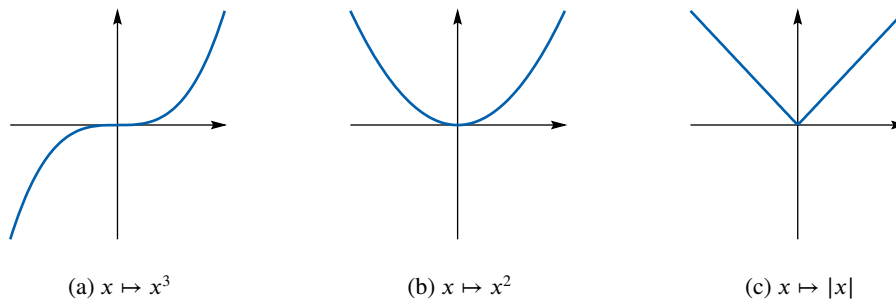
Luentojen runkona olen seurannut Olli Martion kirjaa 'Vektorianalyysi'. Luentoja tehdessäni olen käyttänyt Veikko T. Purmosen luentomonistetta 'Differentiaalilaskentaa euklidisissa avaruuksissa', omia 'Differentiaalilaskenta' luentoani ja James Stewartin kirjaa 'Calculus. Early Transcendentals.'

Ilmari Lehmusoksalle, Outi Bomanille ja Saara E. Pesoselle suurkiitos luentojen \LaTeX :lla kirjoittamisesta. Ilmarille myös suurkiitos kuvien piirtämisestä. Kiitos kaikille luennoille osallistuneille.

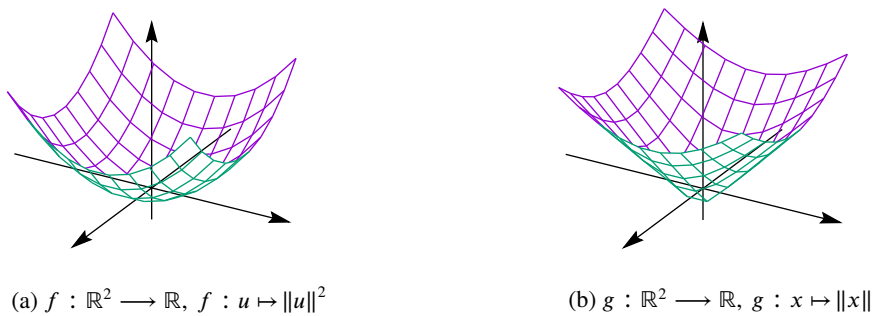
Helsingissä 20.10.2017

Ritva Hurri-Syrjänen

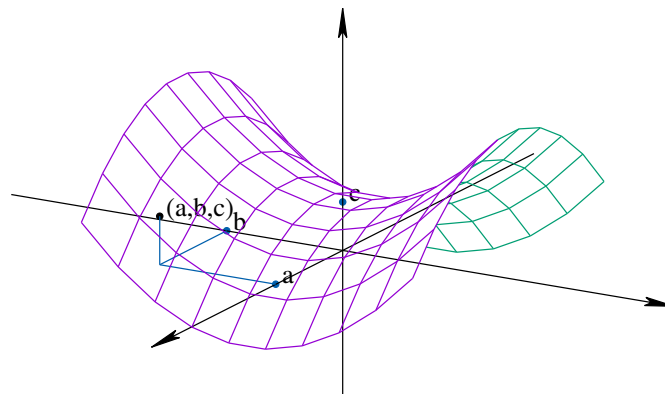
Esimakua



Kuva 1: Funktioiden $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kuvaajia analyysin kursseilta.



Kuva 2: Reaaliarvoisten vektorifunktioiden kuvaajia. Vasemmanpuoleinen graafi on tarkemmin joukko $S = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = \left(u, \|u\|^2 \right), u \in \mathbb{R}^2 \right\}$.



Kuva 3: Pinta $S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2 + \frac{1}{2}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ vektoriavaruudessa \mathbb{R}^3 ja pinnan piste (a, b, c) .

Kertaus

Kaksiulotteinen reaalinen vektoriavaruus \mathbb{R}^2 koostuu lukupareista (x_1, x_2) , missä x_1 ja x_2 ovat reaalilukuja eli:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

missä \mathbb{R} on reaalilukujen joukko.

Siellä meillä on kaikilla tason lukupareilla (x_1, x_2) ja (u_1, u_2) määritelty luonnollinen vektorisumma eli yhteenlasku:

$$(x_1, x_2) + (u_1, u_2) = (x_1 + u_1, x_2 + u_2)$$

ja reaalisella skalaarilla $\lambda \in \mathbb{R}$ kertominen:

$$\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2).$$

Muistutus! $(\mathbb{R}^2, +)$ on Abelin ryhmä, nolla-alkiona $0 = (0, 0)$ ja vasta-alkiona $-a$ kun $a \in \mathbb{R}^2$.

1 Euklidinen avaruus

1.1 Euklidinen avaruus \mathbb{R}^n

1.1.1 Karteesinen tulo

Joukko $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ on \mathbb{R} avaruuden n -kertoiminen karteesinen tulo. Euklidinen avaruus \mathbb{R}^n , $n = 1, 2, \dots, n$ määritellään joukkona:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots, n\} \quad (1.1.2)$$

missä x_1, \dots, x_n on reaali-lukujono, jossa on n -termiä.

Vektori:

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

on avaruuden \mathbb{R}^n alkio, kunhan $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

Luku x_k on x -alkion k . koordinaatti eli k . komponentti.

1.1.3 Vektoriavaruus \mathbb{R}^n

Olkoot $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ja $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Tällöin vektoreille määritellään:

(a) yhteenlasku

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

(b) skalaarilla kertominen

$$\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(c) sekä nolla-alkio

$$0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n ; x + 0 = x.$$

1.1.4 Avaruus \mathbb{R}^n on n -ulotteinen

Avaruus \mathbb{R}^n on n -ulotteinen eli $\dim \mathbb{R}^n = n$. Yksikkövektorit:

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$$

$$e_2 = (0, 1, \dots, 0)$$

\vdots

$$e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

muodostavat avaruuden \mathbb{R}^n luonnollisen kannan eli kanonisen kannan.

Jokaisella vektorilla $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on yksikäsitteinen esitys kantavektoreiden avulla:

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = \sum_{k=1}^n x_k e_k.$$

1.1.5 Avaruuden \mathbb{R}^n sisätulo

1. Kuvaus $(x, y) \mapsto x \cdot y$, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$, joka määritellään:

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{k=1}^n x_k y_k \quad (1.1.6)$$

kun $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ja $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ on sisätulo (eli skalaaritulo eli pistetulo) avaruudessa \mathbb{R}^n . Merkitään myös $(x | y)$.

2. Vektoriavaruus \mathbb{R}^n varustettu edellä mainitulla sisätulolla on euklidinen n -ulotteinen avaruus \mathbb{R}^n .
 3. Euklidinen sisätulo määrää euklidisen normin. Avaruuden \mathbb{R}^n euklidinen normi on kuvaus:

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$$

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Huomaa!

$$\sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

ja luku $\sqrt{x \cdot x}$ määrittelee vektorin x euklidisen pituuden.

4. Kanoninen kanta on ortonormeerattu:

$$e_i \cdot e_j = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{kun } i = j \\ 0, & \text{kun } i \neq j, \text{ kun } i, j = 1, 2, 3, \dots, n. \end{cases} \quad (1.1.7)$$

Jossa $\delta_{i,j}$ on Kroneckerin symboli. Lisäksi:

$$x = \sum_{k=1}^n x_k e_k = \sum_{k=1}^n (x \cdot e_k) e_k$$

5. Cauchy–Schwarzin epäyhtälö

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \text{ kun } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

1.1.8 Euklidinen normi ja euklidinen etäisyys

Avaruuteen \mathbb{R}^n tulee normin kautta määritellyksi etäisyysfunktio eli metriikka. Avaruuden \mathbb{R}^n euklidinen metriikka on sellainen kuvaus d ,

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+, \text{ että } d(x, y) = \|x - y\|, \text{ kun } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Huomautus 1.1.9. Kaava $d(x, y) = \|x - y\|$ määrittelee vektoreiden x ja y välisen etäisyyden euklidisen metriikan suhteen.

Huomautus 1.1.10. Muitakin normeja voidaan käyttää vektoriavaruudessa \mathbb{R}^n .

$$\|x\|_{\max} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

$$\|x\|_{\text{abs}} = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

Näille pätee, että

$$\|x\|_{\max} \leq \|x\| \leq \|x\|_{\text{abs}} \leq n \cdot \|x\|_{\max}.$$

1.1.11 Topologisista käsitteistä avaruuden \mathbb{R}^n joukoille

Avaruuden \mathbb{R}^n topologiset käsitteet tulkitaan aina edellä mainitun euklidisen metriikan kautta.

1. Olkoon $x_0 \in \mathbb{R}$. Kun $r > 0$, niin

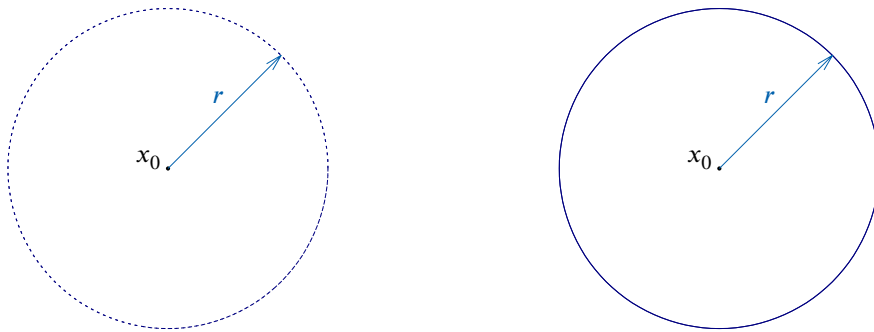
$$B(x_0, r) = B^n(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r\} \quad (1.1.12)$$

on \mathbb{R}^n avaruuden x_0 -keskinen, r -säteinen avoin pallo.

Kun $r > 0$, niin

$$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\} \quad (1.1.13)$$

on \mathbb{R}^n avaruuden x_0 -keskinen, r -säteinen suljettu pallo.



Kuva 4: Avoin pallo $B(x_0, r)$ ja suljettu pallo $\bar{B}(x_0, r)$.

2. Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ sisus eli sisäpisteiden joukko $\text{int} A$ määritellään:

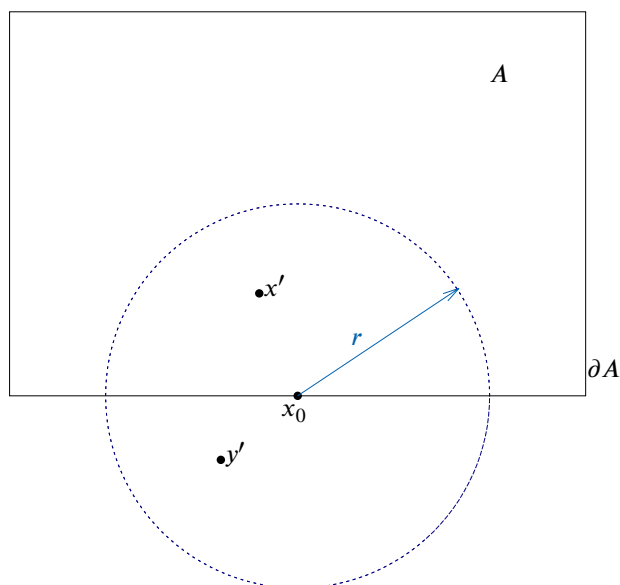
$$\text{int} A = \{x \in A \mid \exists r > 0 \text{ siten, että } B(x, r) \subset A\}.$$

Joukko A on avoin, jos ja vain jos $A = \text{int} A$. Merkitään: $A \Subset \mathbb{R}^n$.

3. Mitä tahansa avointa joukkoa, johon piste x kuuluu, kutsutaan pisteen x ympäristöksi (ystö). Pallo $B^n(x, r)$ on erikoistapaus tästä.
4. Piste $x \in \mathbb{R}^n$ on joukon A kasautumispiste, jos jokaisella $r > 0$ pallo $B^n(x, r)$ sisältää äärettömän monta joukon A pistettä.
5. Piste x on joukon A reunapiste, jos jokainen pallo $B^n(x, r)$ sisältää joukon A ja joukon A komplementin $\mathbb{R}^n \setminus A$ pisteitä. Reunaa merkitään

$$\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ on joukon } A \text{ reunapiste.}\}$$

Joukon A sulkeuma on $\bar{A} = \text{int} A \cup \partial A$.



Kuva 5: Joukon A reunapiste x_0 . Tässä $x' \in A \cap B^n(x_0, r)$ ja $y' \in (\mathbb{R}^n \setminus A) \cap B^n(x_0, r)$.

1.1.14 Täydellinen metrinen avaruus

Avaruus \mathbb{R}^n on täydellinen metrinen avaruus eli jokainen avaruuden \mathbb{R}^n Cauchy jono suppenee.

1.1.15 Joukon halkaisijan merkintä

Epätyhjän joukon $A \subset \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$, halkaisija $\text{diam}(A)$ määritellään

$$\text{diam}(A) = \sup_{x, y \in A} d(x, y) = \sup_{x, y \in A} \|x - y\| \leq \infty. \quad (1.1.16)$$

Joukko on rajoitettu, jos $A = \emptyset$ tai jos $\text{diam}(A) < \infty$.

1.2 Vektorifunktioista

Kuvaus $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ missä, $n > 1$ tai $p > 1$, on vektorifunktio. Erityisesti

- (a) f on vektoriarvoinen funktio, jos $p \geq 2$,
- (b) f on reaaliarvoinen funktio, jos $p = 1$.

Esimerkki 1.2.1. Olkoon $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, kuvaus $(x_1, x_2) \mapsto \sqrt{9 - x_1^2 - x_2^2}$.

Kuvauksen määrittelyjoukko on

$$D = \{(x_1, x_2) \mid 9 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0\} = \{x_1^2 + x_2^2 \leq 9\} = B^2(0, 3).$$

Kuvajoukko on

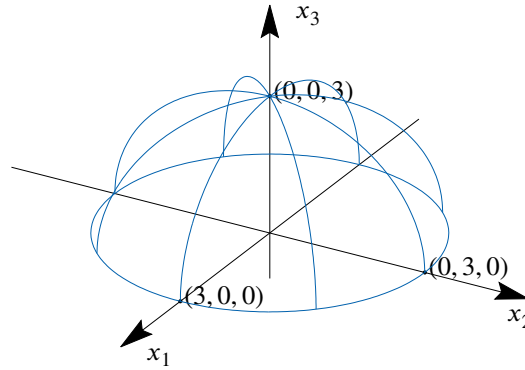
$$\left\{ x_3 \mid x_3 = \sqrt{9 - x_1^2 - x_2^2}; (x_1, x_2) \in D \right\}.$$

Koska

$$x_3 \geq 0 \text{ ja } x_1^2 + x_2^2 \leq 9, \text{ niin } \sqrt{9 - x_1^2 - x_2^2} \leq 3.$$

Siis kuvauksen arvojoukko on $[0, 3]$.

$$\text{Graafi} = \left\{ (x_1, x_2, \sqrt{9 - x_1^2 - x_2^2}) \mid (x_1, x_2) \in D \right\}.$$



Kuva 6: Esimerkin 1.2.1 graafi = $\left\{ (x_1, x_2, \sqrt{9 - x_1^2 - x_2^2}) \mid (x_1, x_2) \in D \right\}$.

1.2.2 Funktion graafin määrittelmä

Jos f on kahden muuttujan reaaliarvoinen funktio, jonka määrittelyjoukko on D , niin funktion f graafi on joukko

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^n \mid x_3 = f(x_1, x_2); (x_1, x_2) \in D\}.$$

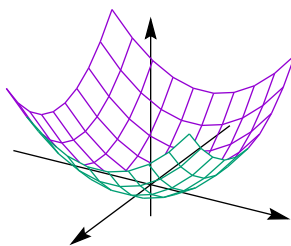
Esimerkki 1.2.3. Kuvaus $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \|u\|^2$ määrittelee avaruuteen \mathbb{R}^3 pinnan

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x = (u, \|u\|^2), u \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

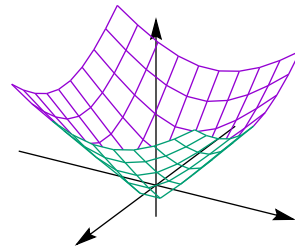
Esimerkki 1.2.4. Kuvaus $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, h(x) \mapsto \|x\|$.

Kuvauksen h graafi on joukko

$$\{(x_1, x_2, h(x_1, x_2)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$$



(a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f : u \mapsto \|u\|^2$



(b) $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, h : x \mapsto \|x\|$

Kuva 7: Esimerkkien 1.2.3 ja 1.2.4 kuvauksien graafit.

1.2.5 Funktion tasa-arvojoukko

Kuvauksen $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, vakiota $r \in f(A)$ vastaava tasa-arvojoukko on

$$S_f(r) = \{x \in A : f(x) = r\}.$$

Jos f on ”riittävän” siisti (säännöllinen), niin $S_f(r)$ on $(n - 1)$ -ulotteinen pinta avaruudessa \mathbb{R}^n .

Esimerkki 1.2.6. Määritä kuvauksen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|^2$, tasa-arvojoukko.

Tasa-arvojoukko on

$$S_f(r^2) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \|x\|^2 = r^2\}$$
$$S^{n-1}(0, r)$$

eli origokeskinen r -säteinen pallopinta avaruudessa \mathbb{R}^n ,

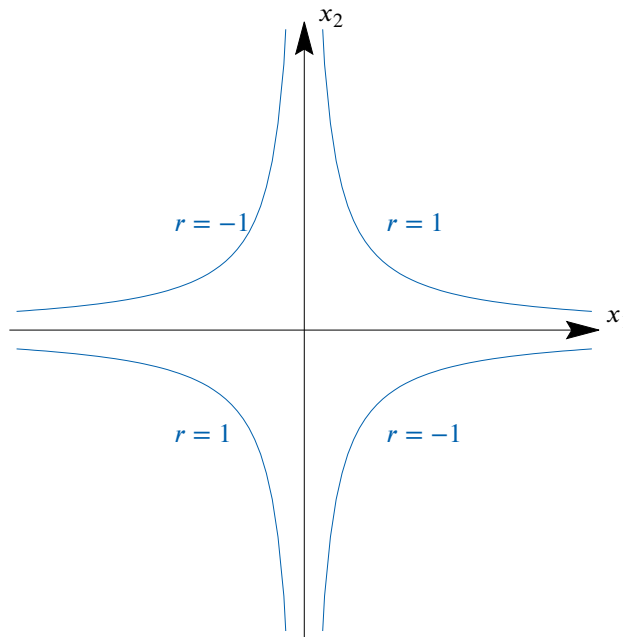
Esimerkki 1.2.7. Määritä funktiolle $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x_1 x_2$, tasa-arvokäyrät.

Tasa-arvokäyrät

$$S_f(r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = x_1 x_2 = r\}$$

ovat hyperbelejä.

Huomautus! Tasa-arvokäyrä $f(x_1, x_2) = k$ on kaikkien niiden määrittelyjoukon pisteiden joukko, joissa f antaa arvon k . Tasa-arvo käyrä näyttää missä graafilla on korkeus k .



Kuva 8: Esimerkin 1.2.7 tasa-arvokäyrät $r = 1$ ja $r = -1$.

1.3 Jonot avaruudessa \mathbb{R}^n ja jonojen suppeneminen

Avaruuden \mathbb{R}^n jono on kuvaus

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Sen arvoja $\varphi(k)$ merkitään alaindeksillä φ_k eli $\varphi(k) = \varphi_k$ ja itse jonon merkintä on $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty}$. Yleensä jonon merkin tilalla on x eli vastaava jono on x_k . Jonolle käytetään merkintää:

$$(x_k) = (x_k)_{k=1}^{\infty}, \text{ missä } x_k = \varphi(k).$$

1.3.1 Suppenemisen määritelmä

Olkoon (x_k) jono avaruudessa \mathbb{R}^n . Olkoon $a \in \mathbb{R}^n$. Jono (x_k) suppenee kohti pistettä $a \in \mathbb{R}^n$, jos jokaista pisteen a ympäristöä U kohti on olemassa luku $k_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $x_k \in U$ kaikilla $k \geq k_0$. Merkitään

$$\begin{aligned} x_k &\longrightarrow a, \text{ kun } k \rightarrow \infty, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_k &= a \text{ tai} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - a\| &= 0. \end{aligned}$$

Alkiota a sanotaan jonon x_k raja-arvoksi eli raja-alkioksi.

Huomautus 1.3.2. Jonoista

1. Suppenevan jonon raja-arvo on yksikäsitteinen.
2. Jos jono ei suppene, niin se hajaantuu.

1.3.3 Cauchy-ehto

Avaruuden \mathbb{R}^n jono (x_k) on Cauchy-jono, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\|x_j - x_k\| < \varepsilon \text{ aina kun } j, k > k_\varepsilon.$$

Huomautus 1.3.4. Suppeneva jono on Cauchy-jono.

Avaruudessa \mathbb{R}^n on myös käänteinen tulos:

Lause 1.3.5. *Avaruus \mathbb{R}^n on täydellinen: Jokainen Cauchy-jono avaruudessa \mathbb{R}^n on suppeneva.*

Lisälukemista: Tom Apostol, Mathematical Analysis.

2 Reaaliarvoiset vektorifunktiot

2.1 Raja-arvo

2.1.1 Raja-arvon määritelmä

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja piste a joukon A kasautumispiste. Kuvauksella $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ on pisteessä a raja-arvo $b \in \mathbb{R}$ joukon A suhteen, jos jokaiselle annettulle $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta_{a,\varepsilon} = \delta > 0$ siten, että

$$|f(y) - b| < \varepsilon, \text{ aina kun } y \in A \text{ ja } 0 < \|y - a\| < \delta.$$

Merkitään

$$\lim_{y \rightarrow a} f(y) = \lim_{y \rightarrow a} f(y) = b$$

Huomautus 2.1.2. Jos funktiolla on olemassa raja-arvo, niin raja-arvo on yksikäsitteinen.

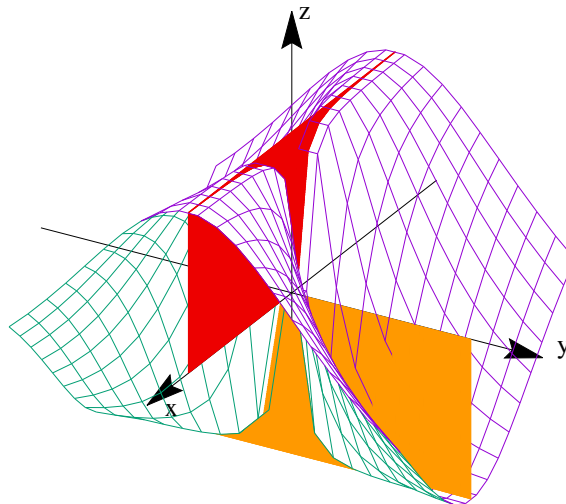
Huomautus 2.1.3. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ja a joukon A kasautumispiste. Olkoon $b \in \mathbb{R}$. Funktiolla f on raja-arvo b pisteessä $a \in \bar{A}$, jos jokaisella jonolla (x_k) , jolla $x_k \in A$ ja $x_k \neq a$, pätee, että $f(x_k) \rightarrow b$.

Esimerkki 2.1.4. Osoitetaan, että raja-arvoa

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

ei ole olemassa.

Ratkaisuehdotus: Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Ensin lähestytään pistettä $(0, 0)$ pitkin x -akselia, eli $y = 0$. Tällöin $f(x, 0) = \frac{x^2}{x^2} = 1$ kaikilla $x \neq 0$. Siis $f(x, y) \rightarrow 1$, kun $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ pitkin x -akselia. Lähestytään origoa nyt pitkin y -akselia, eli $x = 0$. Silloin $f(0, y) = \frac{-y^2}{y^2} = -1$, kaikilla $y \neq 0$. Siis $f(x, y) \rightarrow -1$, kun $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ pitkin y -akselia. Siis funktiolla f ei ole raja-arvoa origossa, sillä raja-arvon tulee olla yksikäsitteinen.



Kuva 9: Esimerkin 2.1.4 tilanne: funktion $z = f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ kuvaaja ja origon lähestyminen sekä x - (punainen) että y - (oranssi) akseleita pitkin.

Esimerkki 2.1.5. Laskuharjoitustehtävä: Selvitä, onko raja-arvoa

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

olemassa.

Esimerkki 2.1.6. Selvitä, onko raja-arvoa

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}$$

olemassa.

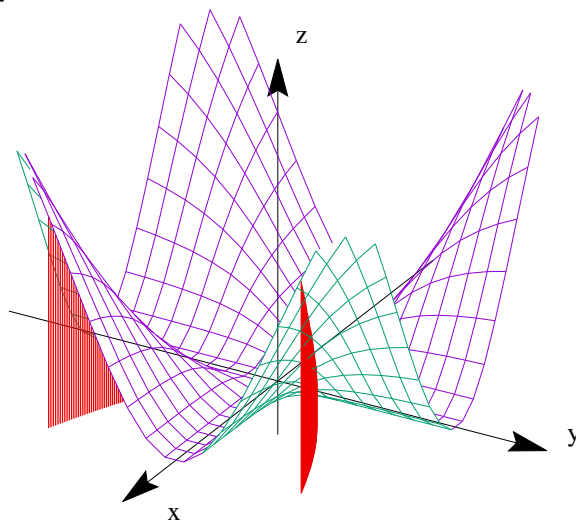
Ratkaisuehdotus: Valitaan $y = x^2$. Silloin

$$\frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = \frac{3x^4}{x^2 + x^4} = \frac{x^2 3x^2}{x^2(1 + x^2)} \rightarrow 0, \text{ kun } x \rightarrow 0 \text{ ja } x \neq 0.$$

Valitaan $x = y^2$. Silloin

$$\frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = \frac{3y^5}{y^4 + y^2} = \frac{y^2 3y^3}{y^2(y^2 + 1)} \rightarrow 0, \text{ kun } y \rightarrow 0 \text{ ja } x \neq 0.$$

Siis raja-arvo voisi ehkä olla olemassa!



Kuva 10: Esimerkin 2.1.6 tilanne: funktion $z = f(x, y) = \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}$ kuvaaja ja origon lähestyminen käyrää $x = y^2$ pitkin (punaisella).

Olkoon $\varepsilon > 0$ annettu ja kiinnitetty. Etsitään $\delta > 0$ siten, että jos

$$0 < \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta, \text{ niin}$$

$$\left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon.$$

(Huomaa: $\|(x, y) - (0, 0)\| = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$)

Siis etsitään $\delta_\epsilon > 0$ siten, että jos $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta_\epsilon$, niin $\frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} < \epsilon$. Nyt

$$\frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} \stackrel{**}{\leq} 3|y| = 3\sqrt{y^2} \leq 3\sqrt{x^2 + y^2}, \quad ** \text{ sillä } 0 < x^2 \leq x^2 + y^2.$$

Jos nyt valitaan $\delta_\epsilon = \epsilon/3$, niin

$$\left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq 3\sqrt{x^2 + y^2} < 3\delta_\epsilon = \frac{3\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Siis määritelmän nojalla $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0$.

2.2 Jatkuvuus

2.2.1 Jatkuvuuden määritelmä

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ kuvaus. $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä $x \in A$, jos jokaiselle annetulle $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta_{x,\epsilon} = \delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \text{ aina kun } y \in A \text{ ja } \|x - y\| < \delta.$$

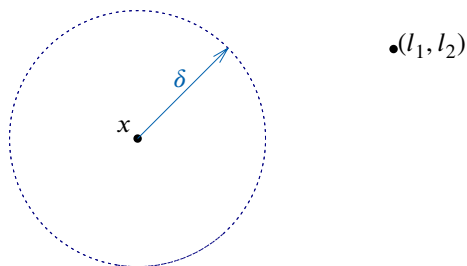
Kuvaus f on jatkuva joukossa A , jos f on jatkuva jokaisessa joukon A pisteessä.

Huomautus 2.2.2. ”Kuvaus f on jatkuva pisteessä $x \in A \subset \mathbb{R}^n$, jos $f(y)$ saadaan mielivaltaisen lähelle pistettä $f(x)$ kaikilla y , jotka ovat riittävän lähellä pistettä x , eli $f(y) \rightarrow f(x)$, kun $y \rightarrow x$.”

Huomautus 2.2.3. Jos $x \in A$ ei ole erillinen piste, niin kuvaus $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä x , jos ja vain jos

$$\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in A}} f(y) = f(x).$$

Kuvaus on aina jatkuva erillisessä pisteessä.



Kuva 11: Jatkuvuudesta: kuvaus f on jatkuva pisteessä x , katso määritelmä edellä. Lisäksi kuvaus on aina jatkuva erillisessä pisteessä (l_1, l_2) .

Lause 2.2.4. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja olkoon $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ kuvaus. Kuvaus f on jatkuva pisteessä $a \in A$, jos ja vain jos*

$$f(x_k) \rightarrow f(a), \text{ kaikilla jonoilla } (x_k), \text{ jolla } x_k \rightarrow a, x_k \in A.$$

Esimerkki 2.2.5. Määrää

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y).$$

Ratkaisuehdotus: Koska voidaan määritellä $f(x, y) = x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y$ ja f on polynomi, niin f on jatkuva kaikkialla. Siis raja-arvo saadaan suoraan sijoituksella

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y) = 1 \cdot 8 - 1 \cdot 4 + 3 + 4 = 11.$$

Esimerkki 2.2.6. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$. Tutki kuvauksen jatkuvuutta.

Huomautus. Jatkuvuutta origossa ei voida tutkia, koska f ei ole määritelty origossa!

Ratkaisuehdotus: Tutkitaan jatkuvuutta, kun $(x, y) \neq (0, 0)$. Olkoon $(x_k, y_k) \rightarrow (x, y)$ ja $(x_k, y_k) \neq (0, 0)$. Siis $x_k \rightarrow x$ ja $y_k \rightarrow y$, kun $k \rightarrow \infty$. Siis $x_k^2 \rightarrow x^2$ ja $y_k^2 \rightarrow y^2$, kun $k \rightarrow \infty$. Näin ollen

$$\frac{x_k^2 y_k^2}{x_k^2 + y_k^2} \rightarrow \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}.$$

Siis

$$|f(x_k, y_k) - f(x, y)| = \left| \frac{x_k^2 y_k^2}{x_k^2 + y_k^2} - \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \right| \rightarrow 0, \text{ kun } k \rightarrow \infty.$$

Siis f on jatkuva pisteissä $(x, y) \neq (0, 0)$.

Huomautus 2.2.7. Jos määritellään funktio f origossa siten, että $f(0, 0) = 0$, niin

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0).$$

Siis funktio f tulee määritellyksi origossa siten, että f on jatkuva kaikkialla.

Huomautus. Jos määritellään $f(0, 0) = b \neq 0$, niin näin määritelty f ei ole jatkuva origossa.

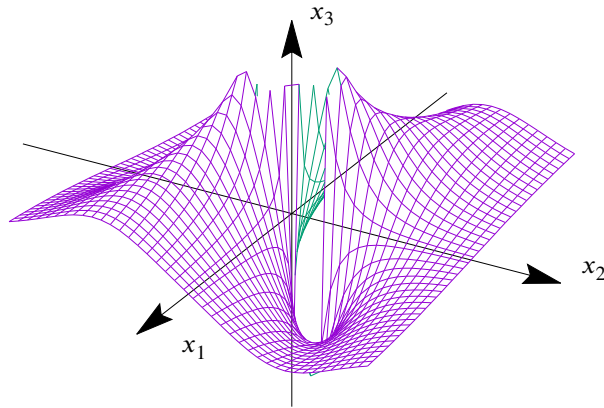
Esimerkki 2.2.8. Onko kuvaus $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^4}, & \text{kun } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{kun } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

jatkuva?

Ratkaisuehdotus: Kuvaus f ei ole jatkuva origossa. Lähestymistie $x_1 = kx_2^2$, $k \neq 0$, antaa

$$f(x_1, x_2) = f(kx_2^2, x_2) = \frac{kx_2^4}{k^2x_2^4 + x_2^4} = \frac{k}{1 + k^2} \neq 0.$$



Kuva 12: Esimerkin 2.2.8 kuvauksen $x_3 = f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^4}$ graafi.

Esimerkki 2.2.9. Olkoon funktio $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^4}, & \text{kun } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{kun } (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases}$$

Funktio g on jatkuva origossa.

Lausutaan funktion g arvot napakoordinaateissa (eli $x_1 = r \cos \varphi$ ja $x_2 = r \sin \varphi$):

$$g(r, \varphi) \stackrel{*}{=} r^2 \cos \varphi \sin \varphi \frac{r^2 \cos 2\varphi}{r^2}.$$

(*: $\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \cos 2\varphi$ ja $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$.)

Siis $|g(r, \varphi)| \leq r^2 \rightarrow 0$, kun $r \rightarrow 0$.

3 Reaaliarvoisten vektorifunktioiden differentiaalilaskentaa avaruudessa \mathbb{R}^n

3.1 Reaaliarvoisten vektorifunktioiden osittaisderivaatoista

Esimerkki 3.1.1. On kehitetty ns. Humindex (temperature–humidity index), joka kuvaa lämpötilan ja kosteuden yhteisvaikutusta. Humidex I on koettu ilman lämpötila, kun $T \hat{=}$ oikea lämpötila ($^{\circ}\text{C}$) ja $H \hat{=}$ kosteus eli $I = f(T, H)$.

		Suhteellinen ilmankosteus %						
T ($^{\circ}\text{C}$) \backslash H		40	45	50	55	60	65	70
26						31		
28						35		
30				36	37	38	40	
32						42		
34						47		

Taulukko 1: Humidex lämpötilan ja suhteellisen kosteuden funktiona. (Lähde: The Meteorological Service of Canada, James Stewart: Calculus, Early Transcendentals.)

Kun $H = 60\%$, niin Humidex'iä katsotaan yhden muuttujan eli lämpötilan funktiona [kun siis H :n arvo kiinnitetty]. Merkitään

$$g(T) = f(T, 60).$$

Silloin $g(T)$ kertoo, kuinka Humidex kasvaa, kun oikea lämpötila nousee ja suhteellinen kosteus on koko ajan 60% .

Funktion g derivaatta, kun $T = 30^{\circ}\text{C}$ on Humidexin (hetkellinen) muutosnopeus lämpötilan suhteen:

$$g'(30) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(30+h) - g(30)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(30+h, 60) - f(30, 60)}{h}.$$

Valitaan $h = 2$ ja tehdään approksimaatio

$$g'(30) \approx \frac{g(32) - g(30)}{2} = \frac{f(32, 60) - f(30, 60)}{2} = \frac{42 - 38}{2} = 2.$$

Valitaan $h = -2$ ja nyt

$$g'(30) \approx \frac{g(28) - g(30)}{-2} = \frac{f(28, 60) - f(30, 60)}{-2} = \frac{35 - 38}{-2} = 1,5.$$

Otetaan keskiarvo, niin voidaan sanoa, että

$$g'(30) \approx 1,75.$$

Tämä tarkoittaa, että kun todellinen lämpötila on 30°C ja ilman suhteellinen kosteus on 60% , niin ”koettu lämpötila” (Humidex) nousee noin $1,75^{\circ}\text{C}$ jokaisella asteella, jonka todellinen lämpötila nousee.

Katsotaan sitten vaakariviä, joka vastaa kiinnitettyä todellista lämpötilaa $T = 30^{\circ}\text{C}$. Luvut $G(H) = f(30, H)$ ovat funktion arvot.

Funktio $G(H) = f(30, H)$ kuvaa kuinka Humidex kasvaa, kun suhteellinen kosteus kasvaa ja todellinen lämpötila on mittarissa 30°C .

Tämän funktion derivaatta, kun $H = 60\%$ on indexin I hetkellinen muutosnopeus luvun H suhteen:

$$G'(60) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(60+h) - G(60)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(30, 60+h) - f(30, 60)}{h}.$$

Otetaan $h = 5$ ja $h = -5$ ja approksimoidaan lukua $G'(60)$ taulukon avulla. Saadaan

$$G'(60) \approx \frac{G(65) - G(60)}{5} = \frac{f(30, 65) - f(30, 60)}{5} = \frac{40 - 38}{5} = \frac{2}{5} = 0,4 \text{ ja}$$

$$G'(60) \approx \frac{G(55) - G(60)}{-5} = \frac{f(30, 55) - f(30, 60)}{-5} = \frac{37 - 38}{-5} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

Siis $G'(60) \approx 0,3$.

Tämä kertoo, että kun lämpötila mittarissa on 30°C ja suhteellinen kosteus on 60% , niin Humidex nousee noin $0,3^\circ\text{C}$ jokaista kosteuden prosentin nousua kohden.

Olkoon nyt f kahden muuttujan reaaliarvoinen funktio,

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y).$$

Kiinnitetään y , olkoon $y = b$ ja b on vakio, mutta annetaan vain muuttujan x vaihdella. Silloin meillä on yhden muuttujan funktio

$$g(x) = f(x, b).$$

Jos funktiolla g on olemassa derivaatta pisteessä a , niin sitä sanotaan funktion f osittaisderivaataksi muuttujan x suhteen pisteessä (a, b) ja merkitään $f_x(a, b)$. Siis

$$f_x(a, b) = g'(a), \text{ kun } g(x) = f(x, b).$$

Derivaatan määritelmän mukaan

$$g'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}, \text{ siis } f_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}.$$

Vastaavasti funktion f osittaisderivaatta muuttujan y suhteen pisteessä (a, b) , merkitään $f_y(a, b)$, saadaan pitämällä x kiinni siten, että $x = a$ ja etsimällä tavallinen derivaatta pisteessä b funktiolle $G(y) = f(a, y)$. Jos raja-arvo on olemassa, niin

$$f_y(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}.$$

Siis esimerkissämme 3.1.1 näillä merkinnöillä Humidexin I hetkellinen muutosnopeus lämpötilan suhteen kun $T = 30^\circ\text{C}$ ja $H = 60\%$ on $f_T(30, 60) \approx 1,75$ ja Humidexin I muutosnopeus todellisen kosteuden suhteen, kun $T = 30^\circ\text{C}$ ja $H = 60\%$ on $f_H(30, 60) \approx 0,3$.

Jos nyt annetaan pisteen (a, b) vaihdella, niin f_x ja f_y tulevat olemaan kahden muuttujan funktioita.

3.1.2 Kahden muuttujan funktion osittaisderivaattojen määritelmä

Jos f on kahden muuttujan funktio, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$, niin sen osittaisderivaatat ovat

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} &= f_x(x, y) \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} &= f_y(x, y)\end{aligned}\tag{3.1.3}$$

mikäli raja-arvot ovat olemassa.

Merkinnöistä: Jos $z = f(x, y)$ niin seuraavia merkintöjä käytetään

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = D_1 f = D_x f = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_y = \partial_1 f = \partial_x f$$

ja vastaavasti $f_y(x, y) = \partial_2 f$.

Esimerkki 3.1.4. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^3 + x^2 y^3 - 2y^2$. Määrittää $f_x(2, 1)$ ja $f_y(2, 1)$.

Ratkaisuehdotus:

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= 3x^2 + 2xy^3 & f_y(x, y) &= 3x^2 y^2 + 4y \\ f_x(2, 1) &= 16 & f_y(2, 1) &= 8\end{aligned}$$

Varoitus. Funktion osittaisderivaattojen olemassaolosta pisteessä a ei seuraa funktion jatkuvuutta pisteessä a .

Esimerkki 3.1.5. Laskuharjoitustehtävä. Jos määritellään $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{kun } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{kun } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Silloin $g_x(0, 0)$ ja $g_y(0, 0)$ ovat olemassa, mutta g ei ole jatkuva origossa.

Huomautus 3.1.6. Nyt $h \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, e_1 = (1, 0)$ ja $e_2 = (0, 1)$; e_1 ja e_2 ovat avaruuden \mathbb{R}^2 kanonisen kannan kantavektorit. Nyt

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x, y) + h(1, 0)) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x, y) + he_1) - f(x, y)}{h};$$

koska $(x, y) + h(1, 0) = (x, y) + he_1 = (x+h, y+0) = (x+h, y)$. Vastaavasti

$$f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x, y) + h(0, 1)) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x, y) + he_2) - f(x, y)}{h};$$

koska $(x, y) + h(0, 1) = (x, y) + he_2 = (x+0, y+h) = (x, y+h)$.

Huomautus 3.1.7 (Sovelluksista). Osittaisderivaatat esiintyvät myös osittaisdifferentiaaliyhtälöissä, esimerkiksi jotka ilmaisevat tiettyjä fysikaalisia lakeja.

Esimerkki 3.1.8. Laplacen yhtälö¹

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Osoita, että funktio $u(x, y) = e^x \sin y$ toteuttaa Laplacen yhtälön.

¹Pierre Laplace 1749-1827.

Ratkaisuehdotus:

$$\begin{aligned}u_x &= e^x \sin y & u_y &= e^x \cos y \\u_{xx} &= e^x \sin y & u_{yy} &= -e^x \sin y.\end{aligned}$$

Siis $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Esimerkki 3.1.9. Osoita, että funktio $u(x, t) = \sin(t - at)$, $a > 0$, toteuttaa aaltoyhtälön

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Ratkaisuehdotus:

$$\begin{aligned}u_x &= \cos(x - at) & u_y &= -a \cos(x - at) \\u_{xx} &= -\sin(x - at) & u_{yy} &= -a^2 \sin(x - at) = a^2 u_{xx}.\end{aligned}$$

3.1.10 Osittaisderivaatoista jatkoa

Olkoon $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$ avoin. Olkoon $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ kuvaus, $a \in \mathcal{G}$. Olkoon $e_1 = (1, 0)$ ja $e_2 = (0, 1)$. Voidaan olettaa, että \mathcal{G} on avoin pallo. Olkoon $k = 1, 2$ kiinnitetty. Jos raja-arvo

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_k) - f(a)}{t}$$

on olemassa, niin raja-arvo on kuvauksen f osittaisderivaatta pisteessä a muuttujan x_k suhteen (eli k . muuttujan suhteen) ja sitä merkitään $\partial_k f(a)$.

Kun $k = 1$: funktion f osittaisderivaatta pisteessä a ensimmäisen muuttujan suhteen, $\partial_1 f(a) = \partial_x f(a)$.

Kun $k = 2$: funktion f osittaisderivaatta pisteessä a toisen muuttujan suhteen, $\partial_2 f(a) = \partial_y f(a)$.

3.1.11 Osittaisderivaattojen geometrinen tulkinta

Joukko

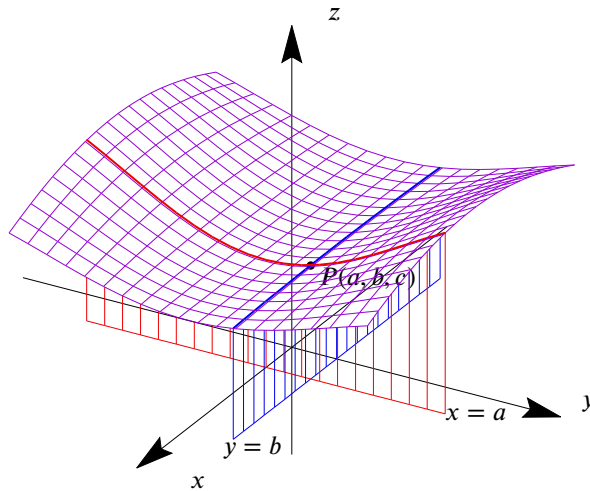
$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

on funktion graafi ja esittää pintaa S avaruudessa \mathbb{R}^3 . (Olettaen, että f on siisti.)

Jos $f(a, b) = c$, niin piste $P(a, b, c)$ on pinnalla S . Kun kiinnitämme $y = b$, niin rajoitamme huomion käyrään C_1 , jossa pystysuora taso $y = b$ leikkaa pinnan S . (Siis C_1 on pinnan S ”jälki” tasolla $y = b$.)

Vastaavasti pystysuora taso $x = a$ leikkaa pinnan S käyrällä C_2 . Kumpikin käyrä kulkee pisteen P kautta. Käyrä C_1 on funktion $g(x) = f(x, b)$ graafi. Siis tangentin T_1 kulmakerroin pisteessä P on $g'(a) = f_x(a, b)$.

Käyrä C_2 on funktion $G(y) = f(a, y)$ graafi. Siis tangentin T_2 kulmakerroin pisteessä P on $G'(b) = f_y(a, b)$.



Kuva 13: Funktion f graafi ja osittaisderivaatoista. Tasot $x = a$ ja $y = b$ leikkaavat funktion f graafin pisteessä $P(a, b, c = f(a, b))$. Funktion f osittaisderivaatat tässä pisteessä P saadaan laskemalla tasojen ja graafin leikkauskäyrien derivaatat. (Selkeyden vuoksi tasoista on piirretty vain funktion graafin alapuolinen osa.)

Siis osittaisderivaatat $f_x(a, b)$ ja $f_y(a, b)$ voidaan tulkita vastaavien tangenttisuorien kulmakertoimina, jota pisteessä $P(a, b, c)$ ovat tangenttisuorina pinnan S käyrille C_1 ja C_2 , tasoissa $y = b$ ja $x = a$. Kuten Humindex -esimerkissämme 3.1.1 näimme, voidaan osittaisderivaatat tulkita edustavan muutosnopeutta.

Jos $z = f(x, y)$, niin $\frac{\partial z}{\partial x}$ esittää funktion f hetkellistä muutosnopeutta muuttujan x suhteen, kun y on kiinnitetty. Vastaavasti $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Esimerkki 3.1.12. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$. Etsi $f_x(1, 1)$ ja $f_y(1, 1)$, sekä tulkitse nämä luvut.

Ratkaisuehdotus:

$$f_x(x, y) = -2x$$

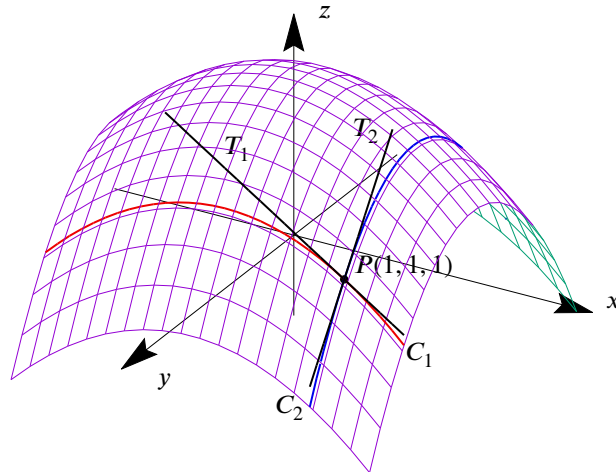
$$f_y(x, y) = -4y$$

$$f_x(1, 1) = -2$$

$$f_y(1, 1) = -4$$

Funktion f graafi on paraboloidi. Pystysuora taso $y = 1$ leikkaa sen paraabelilla $z = 2 - x^2$, $y = 1$ (käyrä C_1). Tälle paraabelille pisteessä $(1, 1, 1)$ olevan tangenttisuoran T_1 kulmakerroin on $f_x(1, 1) = -2$.

Vastaavasti, käyrä C_2 tasossa $x = 1$ leikkaa paraboloidin ja C_2 on paraabeli $z = 3 - 2y^2$, $x = 1$. Tälle paraabelille pisteessä $(1, 1, 1)$ olevan tangenttisuoran T_2 kulmakerroin on $f_y(1, 1) = -4$.



Kuva 14: Esimerkin 3.1.12 osittaisderivaattojen tangenttisuorat pisteessä $x = 1, y = 1$.

3.1.13 Korkeammista osittaisderivaatoista

Jos f on kahden muuttujan funktio, niin sen osittaisderivaatat f_x ja f_y ovat myös kahden muuttujan funktioita:

$$(f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial(\partial f)}{\partial x(\partial x)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial(\partial f)}{\partial y(\partial x)} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

missä siis ensin derivoidaan muuttujan x suhteen ja sitten muuttujan y suhteen.

Lause 3.1.14 (Clairautin lause²). *Olkkoon f määritelty avoimessa pallossa B . Olkkoon $(a, b) \in B$. Jos sekä f_{xy} että f_{yx} ovat olemassa ja jatkuvia pallossa B , niin $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$.*

3.1.15 Osittaisderivaatoista vektoriavaruudessa \mathbb{R}^n

Olkkoon $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$. Kiinnitetään piste $a \in \mathcal{G}$.

Koska \mathcal{G} on avoin, niin on olemassa $r > 0$ siten, että $B^n(a, r) \subset \mathcal{G}$. Vektorit

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ e_k &= (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, \dots, 0, 1) \end{aligned}$$

(jossa e_k vektorin k . alkio on 1 ja sen muut alkioit 0) muodostavat avaruuden \mathbb{R}^n luonnollisen ortonormeeratun kannan.

²Alexis Clairaut 1713-1765.

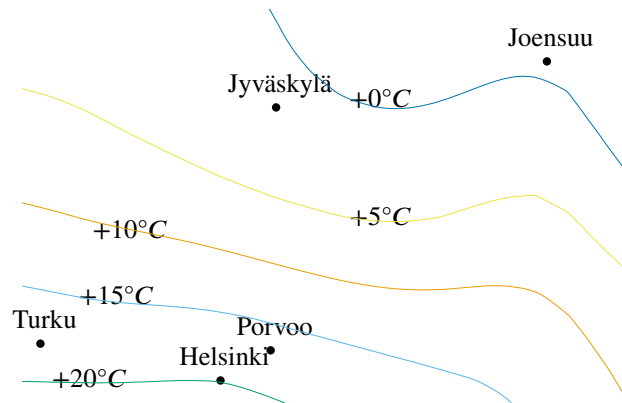
Kiinnitetään k . Jos raja-arvo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + he_k) - f(a)}{h}$$

on olemassa, niin sitä sanotaan funktion f osittaisderivaataksi muuttujan x_k suhteen pisteessä a ja merkitään

$$\partial_k f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a).$$

3.2 Suunnatuista derivaatoista



Kuva 15: Esimerkin 3.2.1 yksinkertaistettu sääkartta lämpötilan tasa-arvokäyrineen (paikkakunnat ovat tasavälisessä lieriöprojektiossa.)

Esimerkki 3.2.1. Sääkartta näyttää lämpötilafunktion $T(x, y)$ tasa-arvokäyrät, jotka aina yhdistävät paikat, joissa on sama lämpötila. Osittaisderivaatta T_x Helsingissä on lämpötilan muutos etäisyyden suhteen, kun menemme Helsingistä itään. Osittaisderivaatta T_y on lämpötilan muutos, kun menemme pohjoiseen.

Mutta, jos haluamme mennä koilliseen, esimerkiksi Joensuuhun, niin kuinka tiedämme lämpötilan muutosnopeuden etäisyyden suhteen?

Tähän tarvitaan suunnattua derivaattaa!

3.2.2 Suunnatun derivaatan määritelmä

Olkoon $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin, $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{G}$ ja olkoon $e \in \mathbb{R}^n$ yksikkövektori, s.e. $\|e\| = 1$. Jos raja-arvo

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t}$$

on olemassa, niin sitä merkitään $\partial_e f(x_0) \in \mathbb{R}$ ja raja-arvo on kuvauksen f suunnattu derivaatta pisteessä x_0 suuntaan e . Myös merkitään $D_e f(x_0) = \partial_e f(x_0)$.

Esimerkki 3.2.3. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x_1 x_2$, eli $x = (x_1, x_2)$, $f(x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$ ja

$$e = \frac{e_1 + e_2}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Määrää $\partial_e f(1, 1)$.

Ratkaisuehdotus:

Koska

$$(1, 1) + te = (1, 1) + t \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \left(1 + t \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + t \frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

niin

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}} \right) \left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}} \right) - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{t^2}{2}}{t} \stackrel{t \neq 0}{=} \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = \partial_e f(1, 1).$$

3.3 Tangenttitasot ja lineaarinen approksimaatio

Yksi tärkeimmistä asioista yhden muuttujan reaaliarvoisten funktioiden differentiaalilaskennassa on, että kun zoomaamme derivoituvan funktion graafilla olevaa pistettä, niin ”graafia ei enää erota selvästi tangenttisuorasta pisteen pienessä ystössä”. Toisin sanoen ”graafi näyttää enemmän ja enemmän suoralta” ja voimme approksimoida funktiota lineaarisella funktiolla.

Kun nyt zoomaamme kohti pistettä kahden muuttujan funktion graafilla (joka on pinta; oletetaan, että f on siisti), niin pinta näyttää enemmän ja enemmän tasolta (pinnan tangenttitasolta) ja voimme approksimoida funktiota kahden muuttujan lineaarifunktiolla.

Laajennamme differentiaalinen ideaa reaaliarvoisille vektorifunktioille.

3.3.1 Tangenttitasoista

Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ja olkoon funktiolla f jatkuvat ensimmäiset osittaisderivaatat f_x ja f_y . Funktion graafi

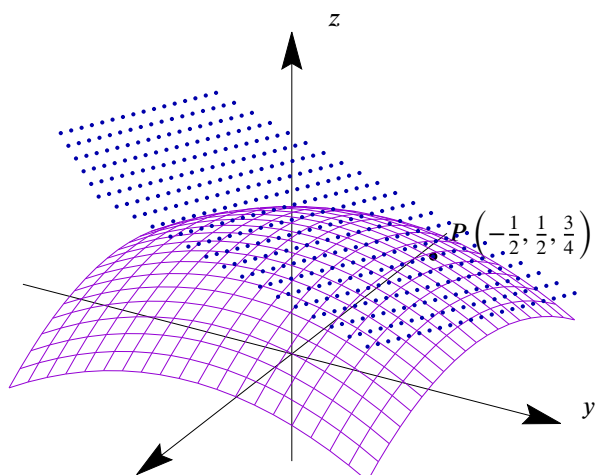
$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, z = f(x, y) \right\}$$

on pinta S .

Olkoon $P = P(x_0, y_0, z_0)$ pinnalla S . Olkoon nyt C_1 ja C_2 käyrät, jotka saadaan leikkaamalla pinta tasolla $y = y_0$ ja vastaavasti $x = x_0$.

Olkoot T_1 ja vastaavasti T_2 tangenttisuorat käyrälle C_1 ja vastaavasti käyrälle C_2 samassa pisteessä P . Silloin pinnan S tangenttitaso samassa pisteessä P määritellään tasona, joka sisältää sekä tangenttisuoran T_1 että tangenttisuoran T_2 .

Jos C on mikä tahansa käyrä, joka on pinnalla S ja kulkee pisteen P kautta, niin sen tangenttisuora pisteessä P on myös tällä tangenttitasolla.



Kuva 16: Pinnalla $S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y) \mid f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 1 \right\}$ olevan pisteen $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ kautta kulkeva yhtälön (3.3.3) antama tangenttitaso $T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{4}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Siis tämä tangenttitaso sisältää kaikki mahdolliset tangenttisuorat, jotka sivuavat pistettä P kaikille käyrille, jotka ovat pinnalla S ja kulkevat pisteen P kautta.

Tangenttitaso pisteessä P on taso, joka ”tarkimmin” approksimoi pintaa S pisteen P pienessä ympäristössä.

Mikä tahansa taso, joka kulkee pisteen $P(x_0, y_0, z_0)$ kautta on muotoa

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad | : C \neq 0$$

$$\frac{A}{C}(x - x_0) + \frac{B}{C}(y - y_0) + z - z_0 = 0$$

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0) \quad ; \quad a = -\frac{A}{C}, \quad b = -\frac{B}{C} \quad (3.3.2)$$

Jos tämä yhtälö esittää tangenttitasoa pisteessä P , niin sen leikkaus tason $y = y_0$ kanssa täytyy olla tangenttisuora T_1 :

$$z - z_0 = a(x - x_0) \quad ; \quad y = y_0.$$

Siis suoran kulmakerroin on tangenttisuoran T_1 kulmakerroin $f_x(x_0, y_0)$. Siis

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0).$$

Vastaavasti, kun $x = x_0$ saamme

$$z - z_0 = b(y - y_0),$$

joka esittää tangenttisuoraa T_2 ja $b = f_y(x_0, y_0)$. Jos funktiolla f on jatkuvat osittaisderivaatat, niin pinnan S tangenttitaso pisteessä $P(x_0, y_0, z_0)$ on

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (3.3.3)$$

Huomautus 3.3.4. Lyhyesti kirjoitettuna gradientivektorin avulla. Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gradientti pisteessä u_0 määritellään

$$\nabla f(u_0) = (\partial_1 f(u_0), \partial_2 f(u_0))$$

kunhan osittaisderivaatat $\partial_1 f$ ja $\partial_2 f$ ovat olemassa. Saadaan

$$z - z_0 = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0).$$

Huomautus 3.3.5. Vertaa tangenttisuoran yhtälö pisteessä t_0 ; $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivoituva

$$f(t) - f(t_0) = f'(t_0)(t - t_0).$$

Esimerkki 3.3.6. Etsi tangenttitaso elliptiselle paraboloidille pisteessä $(1, 1, 3)$. Paraboloidin määrää yhtälö $z = 2x^2 + y^2$.

Ratkaisuehdotus: Olkoon $f(x, y) = 2x^2 + y^2$, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Silloin

$$f_x(x, y) = 4x$$

$$f_y(x, y) = 2y$$

$$f_x(1, 1) = 4$$

$$f_y(1, 1) = 2$$

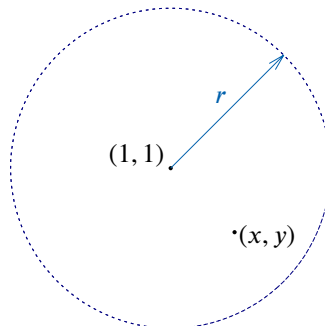
Silloin

$$z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1)$$

$$z = 4x + 2y - 3$$

Tangenttitason piste (x, y, z) toteuttaa yllä olevan yhtälön.

Esimerkistä 3.3.6 vielä: esimerkin funktio $h(x, y) = 4x + 2y - 3$ on affiinikuvaus. Funktio h on hyvä approksimaatio funktiolle $f(x, y)$, kun (x, y) on pisteen $(1, 1)$ riittävän pienessä avoimessa palloympäristössä.



Kuva 17: Piste (x, y) on pisteen $(1, 1)$ pienessä avoimessa palloympäristössä $B^2((1, 1), r)$, $r > 0$.

Funktion f , jolla on jatkuvat osittaisderivaatat, tangenttitaso pisteessä $(a, b, f(a, b))$ on

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

eli

$$z = f(a, b) + \nabla f(a, b) \cdot (x - a, y - b).$$

Siis affiinikuvaus, jonka graafi on tämä tangenttitaso, on

$$h(x, y) = f(a, b) + \nabla f(a, b) \cdot (x - a, y - b).$$

3.3.7 Kuvauksen approksimoinnista

Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ siten, että funktiolla f on olemassa jatkuvat osittaisderivaatat. Kuvausta f approksimoidaan affiinilla kuvauksella

$$h(x, y) \mapsto f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot ((x, y) - (x_0, y_0))$$

pienessä pisteen (x_0, y_0) avoimessa palloympäristössä.

Kuvauksen f graafia

$$\left\{ (x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, z = f(x, y) \right\}$$

approksimoidaan sen tangenttitasolla pisteen $u_0 = (x_0, y_0)$ ympäristössä.

Approksimoivan affiinikuvauksen graafi

$$\left\{ (x, y, h(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, z = h(x, y) \right\}$$

on \mathbb{R}^3 -avaruudessa 2-ulotteinen tangenttitaso pinnalla S (oletetaan, että f on siisti), jonka määrää yhtälö $z = f(x, y)$, pisteessä $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

3.4 Kertaus lineaarikuvauksista ja affiinikuvauksen määritelmä

3.4.1 Lineaarikuvauksen määritelmä

Kuvaus $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ on lineaarinen, jos

a) $L(x + y) = Lx + Ly$

b) $L(\lambda x) = \lambda L(x)$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Toisin sanoen $L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

3.4.2 Lineaarikuvausta vastaava matriisi

Jos vektoriavaruuksien V_1 ja V_2 ($\dim V_1 = n$, $\dim V_2 = p$) kannat on kiinnitetty, niin lineaarikuvausta $L : V_1 \rightarrow V_2$ vastaa yksikäsitteisesti määrätty $p \times n$ matriisi ja kääntäen.

3.4.3 Avaruuden \mathbb{R}^n vektorien esityksestä

Usein avaruuden \mathbb{R}^n vektori $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ samaistetaan $n \times 1$ sarakematriisiin tai $1 \times n$ matriisiin kanssa.

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \sim [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \sim \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

3.4.4 Reaaliarvoista lineaarikuvausta vastaava vektori

Reaaliarvoista lineaarikuvausta $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vastaa yksikäsitteinen vektori $a \in \mathbb{R}^n$ siten, että

$$Lx = a \cdot x, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.4.5)$$

Kääntäen jokaisella $a \in \mathbb{R}^n$ vastaavuus $a \mapsto a \cdot x$, $x \in \mathbb{R}^n$ määrittelee reaaliarvoisen lineaarikuvauksen $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ siten, että (3.4.5) on voimassa.

Esimerkki 3.4.6. Lineaarikuvausta $A : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mapsto Ax = x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 3x_5$$

vastaa rivimatriisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \sim (1, 1, -1, -1, -3).$$

3.4.7 Affiinikuvauksen määritelmä (reaaliarvoisessa tapauksessa)

Yhdistämällä lineaarikuvaus $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ja avaruuden \mathbb{R} siirto vektorin $b \in \mathbb{R}$ verran, $y \mapsto y + b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, saadaan affiinikuvaus

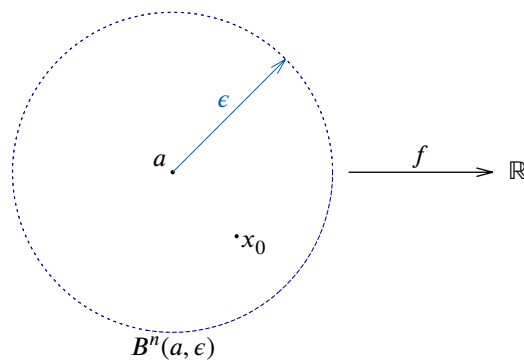
$$h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = Ax + b, \quad x \mapsto Ax + b.$$

3.5 Gradientista

3.5.1 Gradientin määritelmä

Olkoon funktiolla $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, missä \mathcal{G} on avoin joukko avaruudessa \mathbb{R}^n , kaikki osittaisderivaatat pisteessä $x_0 \in \mathcal{G}$. Funktion f gradientti pisteessä x_0 on

$$\nabla f(x_0) = \text{grad}f(x_0) = (\partial_1 f(x_0), \partial_2 f(x_0), \dots, \partial_n f(x_0)) \in \mathbb{R}^n.$$



Kuva 18: Funktio f kuvaa pisteen x_0 avoimesta joukosta \mathcal{G} , joka on tässä avoin pallo $B^n(a, \epsilon)$, reaaliluvuksi. Jos funktiolla f on kaikki osittaisderivaatat pisteessä $x_0 \in \mathcal{G}$, niin sillä on määritelmän 3.5.1 mukaan gradientti pisteessä x_0 .

Esimerkki 3.5.2. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x_1) \cos(x_2)$. Määää $\nabla f(x)$.

Ratkaisuehdotus:

Koska

$$\partial_1 f(x) = \cos(x_1) \cos(x_2)$$

$$\partial_2 f(x) = \sin(x_1) (-\sin(x_2)) = -\sin(x_1) \sin(x_2),$$

siis

$$\nabla f(x) = (\cos(x_1) \cos(x_2), -\sin(x_1) \sin(x_2)).$$

Esimerkki 3.5.3. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|^2$. Määää $\nabla f(x)$.

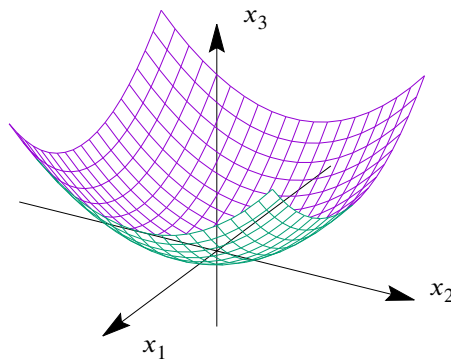
Ratkaisuehdotus: Olkoon $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Silloin

$$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

$$f(x) = \|x\|^2$$

$$\partial_1 f(x) = 2x_1, \partial_2 f(x) = 2x_2, \dots, \partial_n f(x) = 2x_n$$

$$\nabla f(x) = (2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n) = 2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 2x \in \mathbb{R}^n.$$



Kuva 19: Esimerkin 3.5.3 funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|^2$ graafi, kun $n = 2$.

3.6 Derivaatasta

3.6.1 Derivaatan määritelmä

Olkoon $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko. Lineaarikuvausta $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sanotaan reaaliarvoisen vektorifunktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ derivaataksi pisteessä $x_0 \in \mathcal{G}$, jos on voimassa esitys

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Lh + \|h\| \varepsilon(h)$$

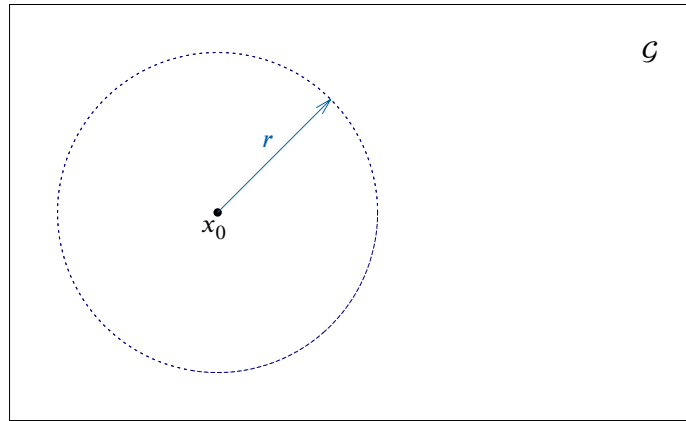
kaikille $h \in \mathbb{R}^n$, joille $x_0 + h \in \mathcal{G}$, missä $\varepsilon(h) \rightarrow 0$, kun $h \rightarrow 0$.

Merkitään

$$Df(x_0) = L.$$

Yhtäpitävästi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Lh}{\|h\|} = 0.$$



Kuva 20: Derivaatan määritelmästä: riittävän pienelle $r > 0$ pätee $B^n(x_0, r) \subset \mathcal{G}$.

Huomautus (1): Rajankäynnissä oletetaan, että $h \neq 0$ ja $x + h \in \mathcal{G}$, eli riittävän pienelle $r > 0$, pätee $B^n(x_0, r) \subset \mathcal{G}$.

Huomautus (2): Määritelmä on hyvin asetettu, sillä derivaattoja voi olla enintään yksi. Jos $L_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ eli L_0 on toinen lineaarikuvaus, joka on myös derivaatta, niin

$$0 = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ u \neq 0 \\ t \neq 0}} \frac{|(L - L_0)(tu)|}{\|tu\|} = \frac{|(L - L_0)(u)|}{|u|}$$

3.6.2 Derivaattakuvaus määritelmä

Avoimen joukon $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ kuvaus $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ on

1. differentioituva pisteessä $x_0 \in \mathcal{G}$, jos sillä on derivaatta $Df(x_0)$ pisteessä x_0 .
2. differentioituva, jos funktiolla f on derivaatta jokaisessa pisteessä $x_0 \in \mathcal{G}$; tällöin

$$Df : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), x \mapsto Df(x)$$

on derivaattakuvaus. Merkitään myös $df = Df$.

Lause 3.6.3. Olkoon $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin.

Olkoon $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ differentioituva.

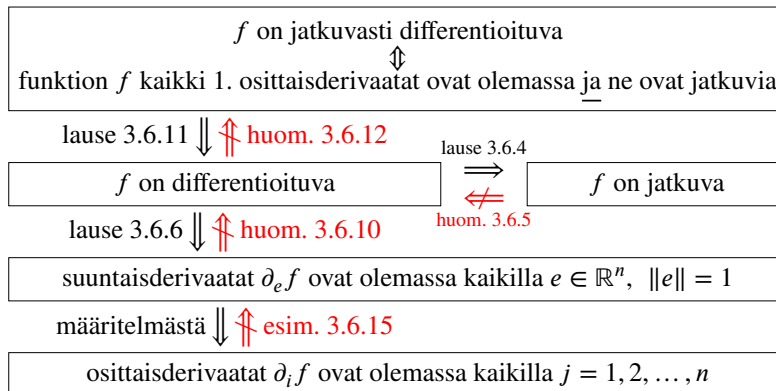
Silloin suuntaisderivaatta $\partial_e f(x)$ on olemassa jokaisen yksikkövektorin e suuntaan ja

$$\partial_e f(x) = Df(x)e.$$

Lisäksi,

$$Df(x)u = \sum_{i=1}^n u_i \partial_i f(x) = \nabla f(x) \cdot u$$

kaikilla $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$.



Kuva 21: Päämäärä luennolta torstaina 28.9.2017. Olkoon $f : B \rightarrow \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}^n$ on avoin pallo. Riittävä ehto differentioituvuudelle ja differentioituvuuden seurauksia. Numerot viittaavat kunkin tuloksen määritteleviin lauseisiin ja huomaa, että minkään tässä esitettyjen differentioituvuudesta seuraavien ominaisuuksien välillä ei ole (yleisesti) ekvivalenssia (viittaukset vastaesimerkkeihin.)

Lause 3.6.4. Olkoon $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko.

- a) Pisteessä $x_0 \in \mathcal{G}$ differentioituva kuvaus $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva tässä pisteessä.
- b) Differentioituva kuvaus $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva.

Lauseen 3.6.4 todistus. Differentioituvuus pisteessä $x_0 \in \mathcal{G}$ tarkoittaa, että

$$f(y) - f(x_0) = Df(x_0)(y - x_0) + \|y - x_0\| \varepsilon(y - x_0)$$

kaikille $y \in B^n(x_0, r) \subset \mathcal{G}$, riittävän pienillä $r > 0$. Siten

$$|f(y) - f(x_0)| \leq \|Df(x_0)(y - x_0)\| + \|y - x_0\| \varepsilon(y - x_0) \rightarrow 0$$

kun $y - x_0 \rightarrow 0$. □

Huomautus 3.6.5. Varoitus! ”Tulos 3.6.4 ei käänny.”

Esimerkiksi $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$, origossa. Funktio f on jatkuva origossa, mutta f ei ole differentioituva origossa.

Lause 3.6.6. Olkoon $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin.

Olkoon $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ differentioituva pisteessä $x \in \mathcal{G}$.

Silloin suuntaisderivaatta $\partial_e f(x)$ on olemassa jokaisen yksikkövektorin e suuntaan ja

$$\partial_e f(x) = Df(x)e. \tag{3.6.7}$$

Lisäksi

$$\begin{aligned} Df(x)u &= \sum_{i=1}^n u_i \partial_i f(x) \\ &= (\partial_1 f(x), \partial_2 f(x), \dots, \partial_n f(x)) \cdot (u_1, u_2, \dots, u_n) \\ &= \nabla f(x) \cdot u \end{aligned} \tag{3.6.8}$$

kaikille $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$.

Lauseen 3.6.6 todistus. Koska pisteessä $x \in \mathcal{G}$ on olemassa derivaatta $Df(x)$, niin

$$f(x + te) = f(x) + Df(x)(te) + \|te\| \varepsilon(te)$$

kunhan $|t|$ on kyllin pieni.

Kun $t \rightarrow 0$:

$$\frac{f(x + te) - f(x)}{t} \stackrel{t \neq 0}{=} Df(x)e + \frac{|t|}{t} \varepsilon(te) \xrightarrow{t \rightarrow 0} Df(x)e.$$

Siis

$$\partial_e f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + te) - f(x)}{t} = Df(x)e.$$

Erityisesti

$$\partial_i f(x) = Df(x)e_i; \quad e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \text{ on } i. \text{ kantavektori.} \quad (3.6.9)$$

Jokaiselle $u \in \mathbb{R}^n$

$$u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \dots + u_n e_n,$$

koska joukko $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ on avaruuden \mathbb{R}^n kanonisen kannan kantavektoreiden joukko.

Siis jokaiselle $u \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} Df(x)u &= Df(x)(u_1 e_1 + u_2 e_2 + \dots + u_n e_n) \\ &\stackrel{\text{lin.}}{=} u_1 Df(x)e_1 + u_2 Df(x)e_2 + \dots + u_n Df(x)e_n \\ &\stackrel{3.6.9}{=} u_1 \partial_1 f(x) + u_2 \partial_2 f(x) + \dots + u_n \partial_n f(x) \\ &= \sum_{i=1}^n u_i \partial_i f(x) \\ &= (\partial_1 f(x), \partial_2 f(x), \dots, \partial_n f(x)) \cdot (u_1, u_2, \dots, u_n) \\ &= \nabla f(x) \cdot u. \end{aligned}$$

□

Huomautus 3.6.10. Varoitus! Suuntaisderivaattojen olemassaolo ei takaa jatkuvuutta, saati sitten differentioituvuutta. Esimerkki: olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^4}, & \text{kun } x \neq 0 \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Olkoon $e = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2, \|e\| = 1$. Silloin

$$\begin{aligned} \frac{f(0 + te) - f(0)}{t} &= \frac{f(ta_1, ta_2) - f(0, 0)}{t} \\ &= \frac{t^3 a_1 a_2^2}{t^3 (a_1^2 + (ta_2^2)^2)} \\ &\stackrel{t \neq 0}{=} \frac{a_1 a_2^2}{a_1^2 + t^2 a_2^4}. \end{aligned}$$

Siis

$$\partial_e f(0) = \begin{cases} \frac{a_2^2}{a_1}, & \text{jos } a_1 \neq 0 \\ 0, & \text{jos } a_1 = 0. \end{cases}$$

Kuitenkaan f ei ole jatkuva origossa. Jos esimerkiksi $x_1 = x_2^2 \neq 0$, niin

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0).$$

Siis f ei ole differentioituva origossa.

Lause 3.6.11. Olkoon $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin, $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$.

Oletetaan, että funktiolla f on olemassa kaikki osittaisderivaatat jokaisessa pisteessä $x_0 \in \mathcal{G}$ ja osittaisderivaatat ovat jatkuvia koko alueessa \mathcal{G} .

Silloin f on differentioituva koko alueessa \mathcal{G} .

Huomautus 3.6.12. Lauseen 3.6.11 ehdot eivät ole välttämättömiä!

Esimerkki: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \|x\|^2 \sin\left(\frac{1}{\|x\|}\right), & \text{kun } x \neq 0 \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Silloin f on differentioituva, vaikka mikään sen osittaisderivaatta ei ole jatkuva origossa. (Funktion f derivaatta origossa on 0.)

3.6.13 Jatkovasti differentioituvista kuvauksista

Määritelmä. Olkoon $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Differentioituva kuvaus $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkovasti differentioituva, jos derivaattakuvaus

$$Df : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \quad x \mapsto df(x)$$

on jatkuva.

Keskeinen tulos: Olkoon $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Olkoon $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$.

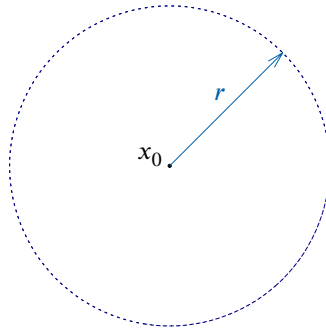
Kuvaus $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkovasti differentioituva, jos ja vain jos sen kaikki osittaisderivaatat ovat olemassa jatkuvina.

3.6.14 Riittävät ehdot differentioituvuudelle

On olemassa tulos, jota emme kuitenkaan todista.

Olkoon $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Jos yksi osittaisderivaatta $\partial_k f(x)$ on olemassa pisteessä x ja muut osittaisderivaatat $\partial_j f(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$, $j \neq k$, ovat olemassa pallossa $B^n(x, r)$, jollekin $r > 0$, ja jatkuvia pisteessä x , niin f on differentioituva pisteessä x .



Kuva 22: Avoin pallo $B^n(x, r) \subset \mathbb{R}^n$.

Huomautus: Tämän tuloksen ehdot ovat riittäviä, mutta eivät välttämättömiä.

Esimerkki: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \|x\|^2 + x_1^2 \sin\left(\frac{1}{|x_1|}\right), & \text{kun } x_1 \neq 0 \\ \|x\|^2, & \text{kun } x_1 = 0. \end{cases}$$

Funktio f on differentioituva origossa, koska

$$\partial_1 f(0) = 0, \quad \partial_j f(x) = 2x_j, \quad j \geq 2.$$

Esimerkki: Kuvaukselle $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \|x\|^2 \sin\left(\frac{1}{\|x\|}\right), & \text{kun } x \neq 0 \\ 0, & \text{kun } x = 0 \end{cases}$$

osittaisderivaatat ovat olemassa, mutta mikään osittaisderivaatta ei ole jatkuva origossa. Kuitenkin funktio f on differentioituva origossa ja $Df(0) = 0$.

Esimerkki 3.6.15. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2, & \text{kun } x_1 = 0 \text{ tai } x_2 = 0 \\ 1, & \text{kun } x_1, x_2 \neq 0. \end{cases}$$

Osittaisderivaatat $\partial_1 f(0)$, $\partial_2 f(0)$ ovat olemassa. Funktio f ei ole jatkuva origossa: jos esimerkiksi $x_1 = x_2 \neq 0$, niin

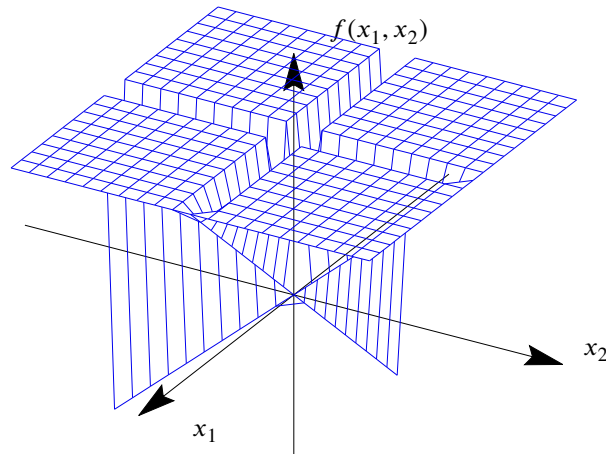
$$f(x_1, x_2) = 1 \neq 0 = f(0, 0).$$

Mutta $\partial_e f(0)$ ei ole aina olemassa:

Olkoon $e = (a_1, a_2)$, $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $\|e\| = 1$. Silloin

$$\frac{f(0 + te) - f(0)}{t} = \frac{f(ta_1, ta_2) - f(0, 0)}{t} \stackrel{t \neq 0}{=} \frac{1}{t}$$

jolla ei ole raja-arvoa, kun $t \rightarrow 0$.



Kuva 23: Esimerkin 3.6.15 funktion f kuvaaja. (Hyppyyä x_1 ja x_2 -akseleille on levennetty selkeyden vuoksi.)

3.7 Derivoimissääntöjä

Lause 3.7.1 (Summa). Jos $f, g : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin, ovat differentioituvia pisteessä $x_0 \in \mathcal{G}$, niin

$$f + g : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$$

on differentioituva pisteessä x_0 ja

$$D(f + g)(x_0)h = Df(x_0)h + Dg(x_0)h, \quad h \in \mathbb{R}^n,$$

ts. $D(f + g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0)$.

Lause 3.7.2 (Tulo). Jos $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ ja $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin, ovat differentioituvia pisteessä $x_0 \in \mathcal{G}$, niin kuvaus

$$\varphi f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \varphi(x)f(x), \text{ eli } (\varphi f)(x) = \varphi(x)f(x)$$

on differentioituva pisteessä $x_0 \in \mathcal{G}$ ja

$$D(\varphi f)(x_0)h = (D\varphi(x_0)h) f(x_0) + \varphi(x_0)Df(x_0)h, \quad h \in \mathbb{R}^n.$$

Korollari 3.7.3. Jos $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin, on differentioituva pisteessä $x_0 \in \mathcal{G}$, niin $\lambda f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, on differentioituva pisteessä $x_0 \in \mathcal{G}$ ja

$$D(\lambda f)(x_0) = \lambda Df(x_0).$$

Lause 3.7.4 (Ketjusääntö). Olkoot $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ avoin.

Jos kuvaus $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ on differentioituva pisteessä $x_0 \in \mathcal{U}$ ja kuvaus $g : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ on differentioituva pisteessä $f(x_0) \in \mathcal{V}$, niin yhdistetty kuvaus $g \circ f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ on differentioituva pisteessä x_0 ja

$$D(g \circ f)(x_0)h = Dg(f(x_0)) Df(x_0)h, \quad h \in \mathbb{R}^n.$$

Lauseiden 3.7.1, 3.7.2 ja 3.7.4, sekä korollarin 3.7.3 todistukset ohitetaan. Ne ovat johdettavissa suoraan derivaatan määritelmästä 3.6.1.

Korollaari 3.7.5. Olkoot $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differentioituvia. Yhdistetyn kuvauksen $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gradientille pisteessä x pätee:

$$\nabla(g \circ f)(x) = g'(f(x)) \nabla f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

eli

$$\nabla(g \circ f)(x) \cdot h = g'(f(x)) \nabla f(x) \cdot h, \quad x, h \in \mathbb{R}^n.$$

Korollaarin 3.7.5 todistus.

$$\begin{aligned} \nabla(g \circ f)(x) \cdot h &= D(g \circ f)(x)h \\ &= Dg(f(x)) Df(x)h \\ &= Dg(f(x)) \nabla f \cdot h \\ &= g'(f(x)) \nabla f \cdot h. \end{aligned}$$

□

Esimerkki 3.7.6. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|$. Tällöin f on differentioituva pisteessä $x \neq 0$. Nyt $f = \varphi \circ g$, missä $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|^2$ ja $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \sqrt{t}$, nimittäin

$$(\varphi \circ g)(x) = \varphi(g(x)) = \sqrt{\|x\|^2} = \|x\|.$$

Lisäksi $\varphi'(t) = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$.

Ketjusäännön sovelluksena, kun $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} Df(x)h &= D(\varphi \circ g)(x)h \\ &= D\left(\varphi(g(x))\right) Dg(x)h \\ &= \varphi'(g(x)) Dg(x)h \\ &= \frac{1}{2} \left(\|x\|^2\right)^{-\frac{1}{2}} 2x \cdot h \\ &= \frac{x \cdot h}{\|x\|} \end{aligned}$$

yllä *: $\nabla g(x) \cdot h$, on laskettu esimerkissä 3.5.3.

Esimerkki 3.7.7. Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differentioituva ja $g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(\|x\|)$. Määrittää $\nabla g(x)$.

Ratkaisuehdotus:

$g = f \circ h$, $h : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \|x\|$ differentioituva.

$$\begin{aligned} \nabla g(x) \cdot v &= Dg(x)v \\ &= Df(h(x)) \circ Dh(x)v \\ &= f'(h(x)) \frac{x \cdot v}{\|x\|} \\ &= \frac{f'(\|x\|)}{\|x\|} x \cdot v. \end{aligned}$$

Siis

$$\nabla g(x) = \frac{f'(\|x\|)}{\|x\|} x.$$

3.8 Ketjusääntö I

Lause 3.8.1. Olkoon $z = f(x, y)$ differentioituva muuttujien x ja y funktio. Olkoot

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$$

derivoituvia muuttujan t funktioita. Silloin z on differentioituva muuttujan t funktio ja

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Esimerkki 3.8.2. Okoon $z = x^2y + 3xy^4$, missä

$$\begin{cases} x = \sin(2t) \\ y = \cos(t). \end{cases}$$

Etsi $\frac{dz}{dt}$, kun $t = 0$.

Ratkaisuehdotus:

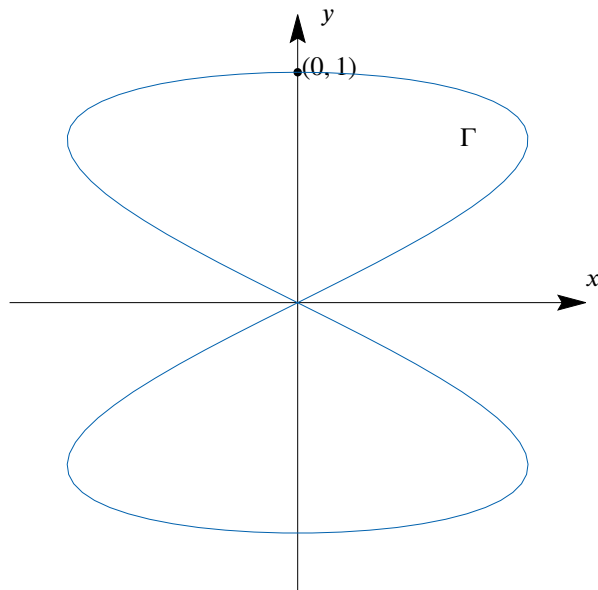
$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= (2xy + 3y^4) (2 \cos(2t)) + (x^2 + 12xy^3) (-\sin(t)). \end{aligned}$$

Kun $t = 0$, niin $\sin(0) = 0 = x(0)$ ja $\cos(0) = 1 = y(0)$. Siis

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=0} = (0 + 3) (2 \cos(0)) + (0 + 0) (-\sin(0)) = 6.$$

Huomautus 3.8.3. Esimerkin 3.8.2 derivaatta voidaan tulkita funktion z muutosnopeudeksi muuttujan t suhteen, kun (x, y) -piste kulkee käyrällä Γ , jonka parametriesitys on

$$\begin{cases} x = \sin(2t) \\ y = \cos(t) \end{cases}$$



Kuva 24: Esimerkin 3.8.2 parametrinen käyrä Γ .

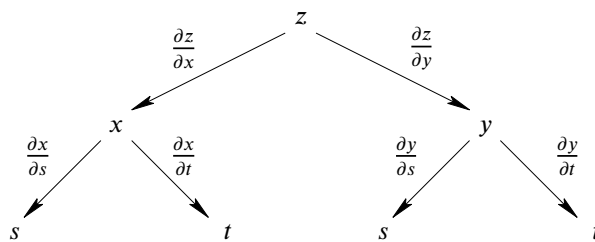
Jos $z = T(x, y) = x^2y + 3xy^4$ esittää lämpötilaa pisteessä (x, y) , niin yhdistetty kuvaus $z = T(\sin(2t), \cos(t))$ antaa lämpötilan käyrän Γ pisteissä. Derivaatta $\frac{dz}{dt}$ edustaa muutosnopeutta, millä lämpötila muuttuu pitkin käyrää Γ .

3.9 Ketjusääntö II

Lause 3.9.1. Olkoon $z = f(x, y)$ differentioituva muuttujien x ja y funktio, missä $x = g(s, t)$ ja $y = h(s, t)$ ovat muuttujien s ja t differentioituvat funktiot. Tällöin

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}.$$



Kuva 25: Lauseen 3.9.1 osittaisderivaattojen ja niiden muuttujien hierarkia.

Esimerkki 3.9.2. Olkoon $z = e^x \sin(y)$, missä

$$\begin{cases} x = st^2 \\ y = s^2t. \end{cases}$$

Etsi $\frac{\partial z}{\partial s}$.

Ratkaisuehdotus:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \\ &= (e^x \sin(y)) t^2 + (e^x \cos(y)) 2st \\ &= t^2 e^{st^2} \sin(s^2 t) + 2ste^{st^2} \cos(s^2 t).\end{aligned}$$

3.10 Suunnatun derivaatan maksimointi

Olkoon $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$; kahden muuttujan funktio.

Tarkastellaan kaikkia mahdollisia suunnattuja derivaattoja annetussa pisteessä. Toisin sanoen otetaan suunnatut derivaatat kaikkiin mahdollisiin suuntiin. Nämä antavat funktion f muutosnopeuden kaikkiin mahdollisiin suuntiin. Luonnolliset kysymykset:

- Missä näistä suunnista funktion f muutosnopeus on suurin?
- Mikä on suurin muutosnopeus?

Lause 3.10.1. *Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ differentioituva.*

Suunnatun derivaatan $\partial_u f(x)$, $\|u\| = 1$, maksimiarvo on $\|\nabla f(x)\|$ ja se saadaan, kun vektorin u suunta on sama kuin gradienttivektorin $\nabla f(x)$.

Lauseen 3.10.1 todistus.

$$\partial_u f = \nabla f \cdot u = \|\nabla f\| \|u\| \cos(\theta),$$

missä $\theta = \angle(\nabla f, u)$ vektoreiden ∇f ja u välinen kulma. Funktion $\theta \mapsto \cos(\theta)$ maksimiarvo on 1 ja se saavutetaan kun $\theta = 0$. □

Lauseen 3.10.1 todistus kurssin tietojen avulla. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ differentioituva. Funktion f suunnattu derivaatta suuntaan $h \in \mathbb{R}^n$, $\|h\| = 1$, pisteessä x_0 on

$$\partial_h f(x_0) = Df(x_0)h,$$

mikä ilmaisee funktion f muutosnopeuden suuntaan h .

Olkoon $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin, differentioituva kuvaus pisteessä $x_0 \in \mathcal{G}$ ja $\nabla f(x_0) \neq 0$.

Silloin gradienttivektori $\nabla f(x_0)$ osoittaa suuntaan, johon f kasvaa pisteessä x_0 maksimaalisesti ja $\|\nabla f(x_0)\|$ on maksimaalisen kasvun nopeus.

Perustelu: Jokaiselle $h \in \mathbb{R}^n$, $\|h\| = 1$ on

$$\partial_h f(x_0) = Df(x_0)h = \nabla f(x_0) \cdot h,$$

koska f on differentioituva.

Cauchyn-Schwartzin epäyhtälön nojalla

$$|\nabla f(x_0) \cdot h| \leq \|\nabla f(x_0)\| \|h\| = \|\nabla f(x_0)\|$$

ja toistaalta

$$\begin{aligned} \partial_h f(x_0) &= \|\nabla f(x_0)\|, & \text{jos ja vain jos } h &= \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}, \\ \text{ja } \partial_h f(x_0) &= -\|\nabla f(x_0)\|, & \text{jos ja vain jos } h &= -\frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}. \end{aligned}$$

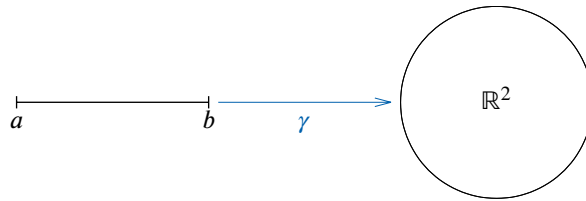
Edellä huomataan, että

$$\frac{\nabla f(x_0) \cdot \nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|} = \frac{\|\nabla f(x_0)\|^2}{\|\nabla f(x_0)\|} = \|\nabla f(x_0)\|, \text{ sillä } \nabla f(x_0) \neq 0.$$

Siis f kasvaa maksimaalisesti suuntaan $\nabla f(x_0)$ vähenee maksimaalisesti suuntaan $-\nabla f(x_0)$. □

3.11 Gradientin geometrinen merkitys

Olkoon $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$ avoin ja $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$. Oletetaan, että funktiolla f on olemassa kaikki osittaisderivaatat ja ne ovat jatkuvia. Tarkastellaan funktion f tasa-arvojoukkoa $f(x, y) = C$.



Kuva 26: Muistutus: polku on jatkuva kuvaus $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Oletetaan, että on olemassa polku

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \text{ missä } x, y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ siten, että } f(x(t), y(t)) = C.$$

Siis γ kulkee tasa-arvokäyrällä $f(x, y) = C$.

Oletetaan, että $x, y \in C^1([a, b])$. Tällöin

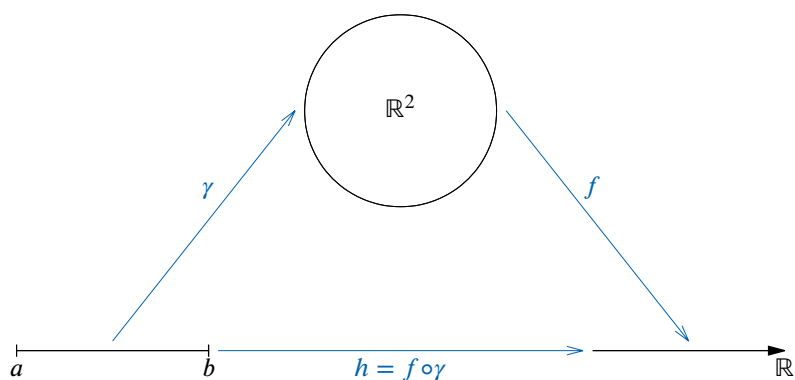
$$\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0, \quad t \in [a, b]$$

eli

$$\nabla f(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) = 0, \quad t \in [a, b].$$

Siis ∇f on kohtisuorassa jokaista tasa-arvokäyrällä kulkevaa C^1 -polkua kohtaan.

Perustelu: Tarkastellaan funktiota $t \mapsto (f \circ \gamma)(t) = f(x(t), y(t))$.



Kuva 27: Yhdistetty kuvaus $h = f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto (f \circ \gamma)(t) = f(x(t), y(t))$. Eli funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ arvoja lasketaan kuljettaessa polkua $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ pitkin.

Koska γ sisältyy tasa-arvojoukkoon, niin

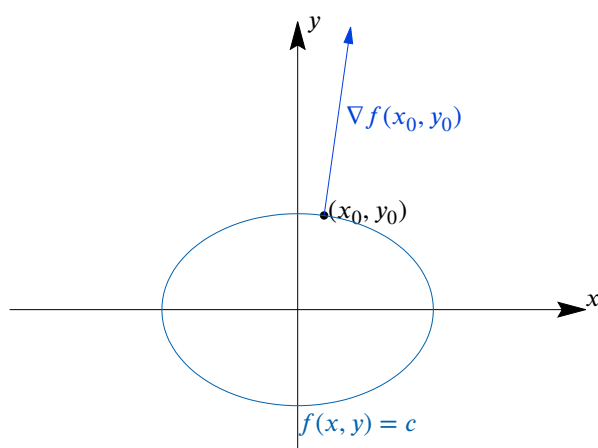
$$h'(t) = (f \circ \gamma)'(t) = 0, \quad t \in [a, b].$$

Nyt I Ketjusäännön (3.8) nojalla

$$\begin{aligned} 0 &= D(f \circ \gamma)(t) = \frac{d}{dt} \left(f(\gamma(t)) \right) \\ &= \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= (\partial_x f, \partial_y f) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) \\ &= \nabla f(x, y) \cdot \gamma'(t) \end{aligned}$$

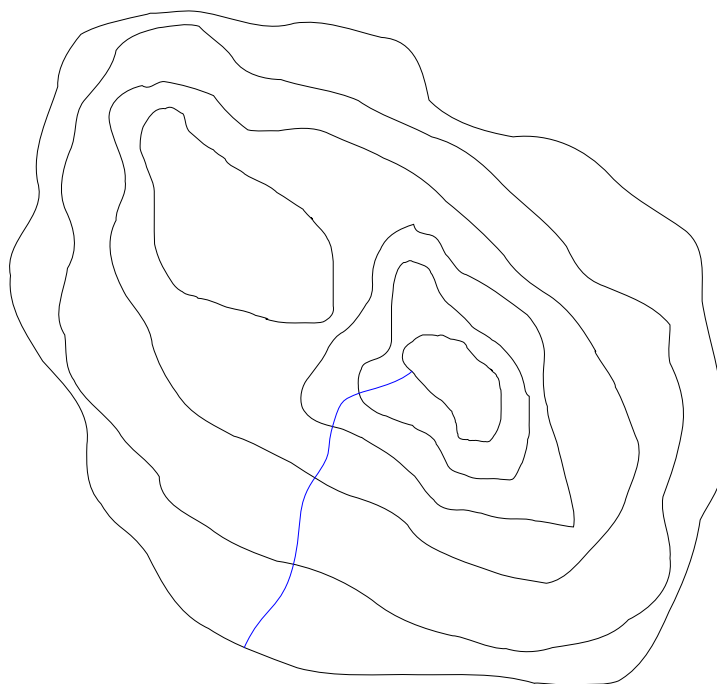
Huomautus 3.11.1. Jos $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ ja piste $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Gradienttivektori $\nabla f(x_0, y_0)$ antaa funktion f nopeimman kasvun suunnan.

Toisaalta gradienttivektori $\nabla f(x_0, y_0)$ on kohtisuorassa tasa-arvokäyrää $f(x, y) = C$ vastaan.



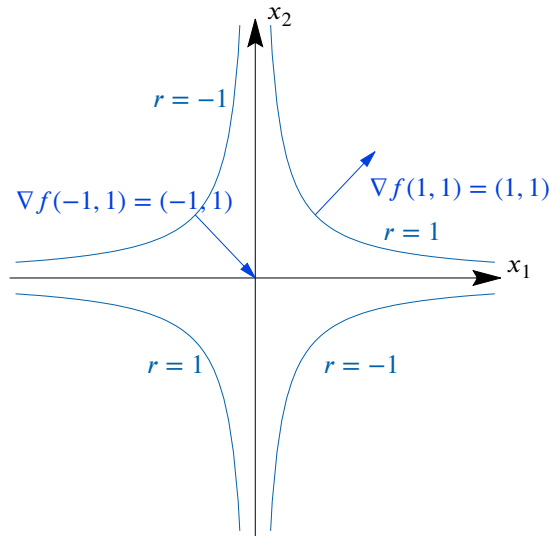
Kuva 28: Gradientivektori $\nabla f(x_0, y_0)$ tasa-arvokäyrän $f(x, y) = c$ pisteessä (x_0, y_0) . Tässä on valittu $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2$, $c = 1$ ja $(x_0, y_0) \approx (0,276, 0,981)$.

Jos katsomme vuoren karttaa ja $f(x, y)$ kuvaa korkeutta merenpinnasta pisteessä (x, y) niin käyrä jolla on jyrkin nousu voidaan piirtää/etsiä tekemällä se kohtisuoraksi kaikkia tasa-arvokäyriä vastaan.



Kuva 29: Yksinkertaistettu vuoren kartta, jossa piirrettynä (erästä) jyrkintä reittiä kulkeva polku.

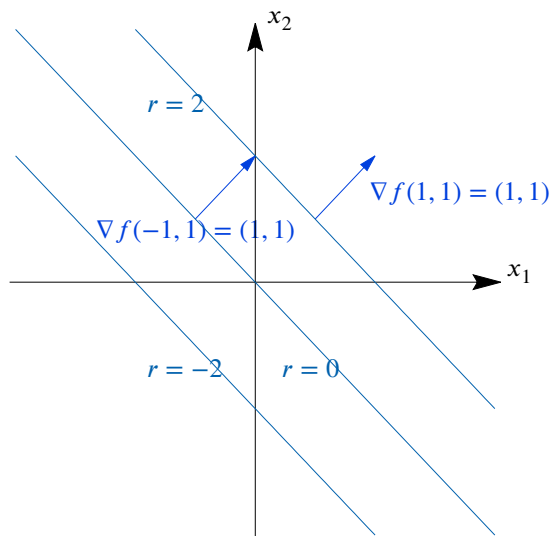
Esimerkki 3.11.2. Gradienttivektoreita esimerkin 1.2.7 tasa-arvokäyrille.



Kuva 30: Esimerkin 1.2.7 funktiolle $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x_1 x_2$ tasa-arvokäyrät $r = 1$ ja $r = -1$, sekä gradienttivektorit pisteissä $(-1, 1)$ ja $(1, 1)$.

Esimerkki 3.11.3. Olkoon funktio $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x_1 + x_2$. Nyt

$$df(x) = f \sim [1 \ 1], \quad \nabla f(x) = (1, 1), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad S(r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = r \right\}$$



Kuva 31: Esimerkin 3.11.3 funktiolle $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x_1 + x_2$ tasa-arvokäyrät $r = -2, r = 0$ ja $r = 2$. Geometrisesti tasa-arvokäyrät ovat suoria. Lisäksi kuvaan on piirretty gradienttivektorit pisteissä $(-1, 1)$ ja $(1, 1)$.

4 Reaaliarvoisten kuvausten korkeammat osittaisderivaatat ja lokaalit ääriarvot

4.1 Korkeammat osittaisderivaatat

4.1.1 Korkeampien osittaisderivaattojen määritelmä

Reaaliarvoisella funktiolla $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin, olkoon pisteen $x_0 \in \mathcal{G}$ avoimessa ympäristössä $\mathcal{U} \subset \mathcal{G}$ osittaisderivaatta $\partial_i f(x)$ kaikilla $x \in \mathcal{U}$.

Jos funktiolle $\partial_i f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ on pisteessä x_0 osittaisderivaatta $\partial_j(\partial_i f)(x_0)$, niin tätä sanotaan funktion f toisen kertaluvun osittaisderivaataksi pisteessä x_0 ja merkitään

$$\partial_j(\partial_i f)(x_0) = \partial_j \partial_i f(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) = D_{ji} f(x_0) = \partial_{ji} f(x_0).$$

Vastaavasti määritellään yleisesti k . kertaluvun osittaisderivaatat

$$\begin{aligned} \partial_{i_1}(\partial_{i_2} \dots (\partial_{i_k} f) \dots)(x_0) &= \partial_{i_1} \partial_{i_2} \dots \partial_{i_k} f(x_0) = \frac{\partial^k f}{\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}}(x_0) \\ &= D_{i_1 \dots i_k} f(x_0) = \partial_{i_1 \dots i_k} f(x_0) \end{aligned}$$

missä $1 \leq i_j \leq n$, $j = 1, 2, \dots, k$.

Jos $i_1 = \dots = i_n = i$, niin merkitään myös $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} f(x_0) = \partial_i^k f(x_0)$.

Esimerkki 4.1.2. Funktiolle $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x_1 \sin x_3 + x_2^2$, kun $x = (x_1, x_2, x_3)$:

$$\begin{array}{lll} \partial_1 f(x) = \sin x_3, & \partial_2 f(x) = 2x_2, & \partial_3 f(x) = x_1 \cos x_3 \\ \partial_1 \partial_1 f(x) = 0, & \partial_2 \partial_1 f(x) = 0, & \partial_3 \partial_1 f(x) = \cos x_3 \\ \partial_1 \partial_2 f(x) = 0, & \partial_2 \partial_2 f(x) = 2, & \partial_3 \partial_2 f(x) = 0 \\ \partial_1 \partial_3 f(x) = \cos x_3, & \partial_2 \partial_3 f(x) = 0, & \partial_3 \partial_3 f(x) = -x_1 \sin x_3 \end{array}$$

Erikoisesti tässä tapauksessa

$$\partial_2 \partial_1 f(x) = \partial_1 \partial_2 f(x), \partial_3 \partial_1 f(x) = \partial_1 \partial_3 f(x) \text{ ja } \partial_3 \partial_2 f(x) = \partial_2 \partial_3 f(x).$$

4.1.3 C^k ja C^∞ -funktioiden määritelmät

Funktio $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin, on k kertaa (osittais)derivoituva pisteessä $x_0 \in \mathcal{G}$, jos sen kaikki osittaisderivaatat kertalukua $\leq k$ ovat olemassa pisteessä x_0 .

Funktio $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin, on k kertaa jatkuvasti derivoituva avoimessa joukossa \mathcal{G} eli f on C^k -funktio, merkitään $f \in C^k(\mathcal{G})$, jos sen kaikki osittaisderivaatat kertalukua $\leq k$ ovat olemassa ja jatkuvia avoimessa joukossa \mathcal{G} .

Funktio $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin, on äärettömän monta kertaa jatkuvasti derivoituva avoimessa joukossa \mathcal{G} eli f on C^∞ -funktio, merkitään $f \in C^\infty(\mathcal{G})$, jos sen kaikkien kertalukujen osittaisderivaatat ovat olemassa ja jatkuvia avoimessa joukossa \mathcal{G} .

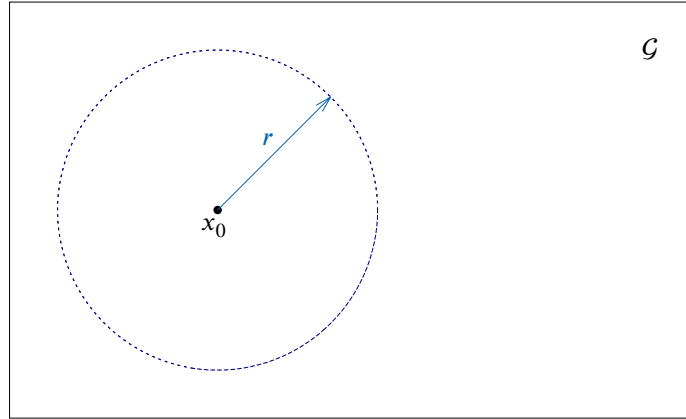
Esimerkki 4.1.4. Esimerkin 4.1.2 funktiolla on olemassa kaikkien kertalukujen osittaisderivaatat ja ne ovat jatkuvia avaruudessa \mathbb{R}^3 , joten $f \in C^k(\mathbb{R}^3)$ kaikilla $k = 1, 2, \dots$, siis $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Huomautus 4.1.5. Esimerkin 4.1.2 funktioille saimme

$$\partial_2 \partial_1 f(x) = \partial_1 \partial_2 f(x), \partial_3 \partial_1 f(x) = \partial_1 \partial_3 f(x) \text{ ja } \partial_3 \partial_2 f(x) = \partial_2 \partial_3 f(x).$$

Tämä ei ole sattumaa!

Lause 4.1.6. Jos C^1 -funktiolle $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin, on pisteen $x_0 \in \mathcal{G}$ avoimessa ympäristössä jatkuva [oleellista!] osittaisderivaatta $\partial_j \partial_i f$, niin silloin myös $\partial_i \partial_j f(x_0)$ on olemassa ja $\partial_i \partial_j f(x_0) = \partial_j \partial_i f(x_0)$.



Kuva 32: Lauseen 4.1.6 vaatimus: riittävän pienelle $r > 0$ pätee $B^n(x_0, r) \subset \mathcal{G}$.

Korollari 4.1.7. Jos $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin, on C^k -funktio ja $\partial_{i_1} \partial_{i_2} \dots \partial_{i_k} f$, $1 \leq i_j \leq n$, $j = 1, \dots, k$, on jokin k . kertaluvun osittaisderivaatta, niin

$$\partial_{i_1} \partial_{i_2} \dots \partial_{i_k} f = \partial_{r_1} \partial_{r_2} \dots \partial_{r_k} f$$

kaikilla lukujen i_1, \dots, i_k permutaatioilla r_1, \dots, r_k .

Esimerkki 4.1.8. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x_1^2 x_2^2}$, kun $x = (x_1, x_2)$. Määrittää/Etsi $\partial_2 \partial_2 \partial_2 \partial_1 \partial_1 f(x)$.
Ratkaisuehdotus:

Korollarin 4.1.7 nojalla

$$\partial_2 \partial_2 \partial_2 \partial_1 \partial_1 f(x) = \partial_1 \partial_1 \partial_1 \partial_2 \partial_2 f(x),$$

sillä selvästi $f \in C^6(\mathbb{R}^2)$.

Koska $\partial_2 \partial_2 \partial_2 f(x) = 0$, niin on myös $\partial_2 \partial_2 \partial_2 \partial_1 \partial_1 f(x) = 0$.

4.2 Korkeammat differentiaalit

4.2.1 Korkeampien differentiaalien määritelmä

Olkoon $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin, C^k -funktio, $k \geq 1$. Funktion k . kertaluvun differentiaali pisteessä $x_0 \in \mathcal{G}$ on funktio $d^k f(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$d^k f(x_0)(h) = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} f(x_0) h_{i_1} \dots h_{i_k}, \text{ missä } h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Lisäksi asetetaan

$$d^0 f(x_0)(h) = f(x_0).$$

Muistutus:

$$d^1 f(x_0)(h) = df(x_0)(h) = \partial_1 f(x_0)h_1 + \dots + \partial_n f(x_0)h_n = \sum_{j=1}^n \partial_j f(x_0)h_j.$$

Huomautus:

$$d^2 f(x_0)(h) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \partial_{i_1} \partial_{i_2} f(x_0)h_{i_1}h_{i_2}.$$

Korollaari 4.2.2. Jos $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, on C^k -funktio, niin

$$d^k f(x_0)(h) = \sum_{k_1+\dots+k_n=k} \frac{k!}{k_1! \dots k_n!} \partial_1^{k_1} \dots \partial_n^{k_n} f(x_0)h_1^{k_1} \dots h_n^{k_n},$$

missä $x_0 \in \mathbb{R}^n$ kiinnitetty, $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$.

Usein merkitään

$$\frac{k!}{k_1! \dots k_n!} = \binom{k}{k_1 \dots k_n}.$$

Esimerkki 4.2.3. Funktiolle $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^2 + x_1x_2$, kun $x = (x_1, x_2)$ ja $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x) &= 2x_1 + x_2, & \partial_2 f(x) &= x_1, \\ \partial_1 \partial_1 f(x) &= 2, & (\partial_1 \partial_2 f(x) = 1)^* &, \\ \partial_2 \partial_1 f(x) &= 1, & \partial_2 \partial_2 f(x) &= 0, \\ \partial_1 \partial_j \partial_k f(x) &= 0. \end{aligned}$$

koska $*f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Siis

$$\begin{aligned} d^0 f(x)(h) &= f(x) = x_1^2 + x_1x_2 \quad (\text{asetuksen mukaan}) \\ d^1 f(x)(h) &= \partial_1 f(x)h_1 + \partial_2 f(x)h_2 = (2x_1 + x_2)h_1 + x_1h_2 \\ d^2 f(x)(h) &= \sum_{i_1=1}^2 \sum_{i_2=1}^2 \partial_{i_1} \partial_{i_2} f(x)h_{i_1}h_{i_2} = \sum_{k_1+k_2=2} \binom{2}{k_1 k_2} \partial_1^{k_1} \partial_2^{k_2} f(x)h_1^{k_1} h_2^{k_2} \\ &= \binom{2}{2 \ 0} \partial_1^2 f(x)h_1^2 + \binom{2}{1 \ 1} \partial_1 \partial_2 f(x)h_1h_2 + \binom{2}{0 \ 2} \partial_2^2 f(x)h_2^2 \\ &= 1 \cdot 2 \cdot h_1^2 + 2 \cdot 1 \cdot h_1h_2 + 1 \cdot 0 \cdot h_2^2 = 2h_1^2 + 2h_1h_2 \\ d^k f(x)(h) &= 0, \text{ kun } k \geq 3. \end{aligned}$$

Esimerkki 4.2.4. Funktiolle $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x_1 + \cos x_2 + e^{x_3}$, etsitään 2. kertaluvun differentiaali pisteessä $(\pi/2, 0, 0)$, ts. $d^2 f(\pi/2, 0, 0)$.

Ratkaisuehdotus:

Nyt $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Määritetään/Etsitään ensin 2.kertaluvun osittaisderivaatat pisteessä

$$x = (x_1, x_2, x_3) = (\pi/2, 0, 0)$$

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x) &= \cos x_1, & \partial_2 f(x) &= -\sin x_2, & \partial_3 f(x) &= e^{x_3} \\ \partial_{11} f(x) &= -\sin x_1 = -1, & \partial_{22} f(x) &= -\cos x_2 = -1, & \partial_{33} f(x) &= e^{x_3} = 1 \\ \partial_{21} f(x) &= 0, & \partial_{32} f(x) &= 0, & & \\ \partial_{31} f(x) &= 0. & & & & \end{aligned}$$

Näin ollen, kun $h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} d^2 f(\pi/2, 0, 0)h &= \sum_{k_1+k_2+k_3=2} \binom{2}{k_1 k_2 k_3} \partial_1^{k_1} \partial_2^{k_2} \partial_3^{k_3} f(\pi/2, 0, 0) h_1^{k_1} h_2^{k_2} h_3^{k_3} \\ &= \binom{2}{2 0 0} (-1) h_1^2 + \binom{2}{1 1 0} 0 \cdot h_1 h_2 + \binom{2}{1 0 1} 0 \cdot h_1 h_3 \\ &\quad + \binom{2}{0 2 0} (-1) h_2^2 + \binom{2}{0 1 1} 0 \cdot h_2 h_3 + \binom{2}{0 0 2} \cdot 1 h_3^2 \\ &= -h_1^2 - h_2^2 + h_3^2. \end{aligned}$$

Huomautus 4.2.5. Vaikka $d^1 f(x) = df(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, niin yleisesti $d^k f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ei ole lineaarinen, kun $k > 1$.

Itse asiassa $d^k f(x)(h)$ on muuttujien h_1, \dots, h_n astetta k oleva homogeeninen polynomi

$$d^k f(x)(th_1, \dots, th_n) = t^k d^k f(x)(h_1, \dots, h_n), \quad t > 0.$$

4.3 Taylorin kaava

4.3.1 Kertaus yhden muuttujan Taylorin kaavasta

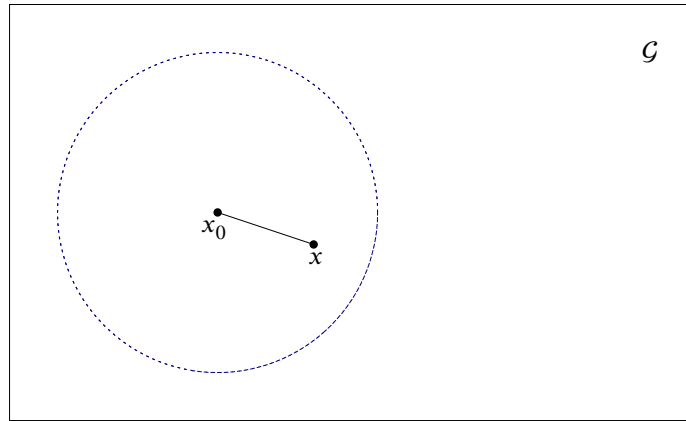
Olkoon $\Delta \subset \mathbb{R}$ avoin väli, $f \in C^{k+1}(\Delta)$. Jos $x \in \Delta$ ja $y \in \Delta$, niin on olemassa $\xi \in \Delta$, ja ξ on lukujen x ja y välissä siten, että

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + \dots + \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (y-x)^k + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} (y-x)^{k+1}.$$

Lause 4.3.2 (Taylorin kaava). *Olkoon $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, \mathcal{G} on avoin avaruudessa \mathbb{R}^n , ja oletetaan, että f on C^{k+1} -funktio, $k \geq 0$.*

Jos $x_0 \in \mathcal{G}$ ja $x \in \mathcal{G}$ siten, että jana $\mathcal{J}(x_0, x) \subset \mathcal{G}$, niin on olemassa piste $z = z_x \in \mathcal{J}(x_0, x)$ siten, että

$$f(x) = \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} d^j f(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(z)(x-x_0).$$



Kuva 33: Taylorin kaavasta 4.3.2: jana $J(x_0, x)$ pisteiden x_0 ja x välillä pisteen x_0 pienessä ympäristössä.

Huomautus 4.3.3. Oleellinen asia Taylorin kaavassa on se, että oikean puolen summalauseke antaa funktiolle pisteen x_0 pienessä ympäristössä polynomiaprossimaation, jonka tarkkuutta voidaan arvioida oikean puolen jälkimmäisellä termillä, vaikka pisteen $z = z_x$ tarkkaa sijaintia janalla ei tunneta.

4.3.4 Taylorin polynomin määritelmä

Olkoon $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, \mathcal{G} on avoin avaruudessa \mathbb{R}^n , ja oletetaan, että f on C^k -funktio. Silloin

$$\left(T_{x_0}^k f\right)(h) = \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} d^j f(x_0)(h), \quad h \in \mathbb{R}^n,$$

on astetta k olevan funktion f Taylorin polynomi pisteessä $x_0 \in \mathcal{G}$, sovellettuna vektoriin h .

Huomautus 4.3.5. Peräkkäisten Taylorin polynomioiden palautuskaava:

$$\left(T_x^k f\right)(h) = \left(T_x^{k-1} f\right)(h) + \frac{1}{k!} d^k f(x)(h).$$

Esimerkki 4.3.6. Esimerkin 4.2.3 funktiolle $\left(f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2\right)$

$$\left(T_x^0 f\right)(h) = f(x) = x_1^2 + x_1 x_2$$

$$\left(T_x^1 f\right)(h) = f(x) + \frac{1}{1!} d^1 f(x)(h) = x_1^2 + x_1 x_2 + (2x_1 + x_2)h_1 + x_2 h_2$$

$$\left(T_x^2 f\right)(h) = \left(T_x^1 f\right)(h) + \frac{1}{2!} d^2 f(x)(h) = x_1^2 + x_1 x_2 + (2x_1 + x_2)h_1 + x_2 h_2 + h_1^2 + h_1 h_2$$

$$\left(T_x^k f\right)(h) = \left(T_x^2 f\right)(h), \quad \text{kun } k \geq 2.$$

Erityisesti $\left(T_0^k f\right)(h) = f(h)$, kun $k \geq 2$.

Esimerkki 4.3.7. Esimerkin 4.2.4 funktiolle $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sin x_1 + \cos x_2 + e^{x_3}$$

on pisteessä $(\pi/2, 0, 0)$, kun $h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$

$$d^1 f(x_0)(h) = h_3 \quad \text{ja} \quad d^2 f(x_0)(h) = -h_1^2 - h_2^2 + h_3^2.$$

Siis

$$\begin{aligned} (T_{x_0}^1 f)(h) &= f(x_0) + \frac{1}{1!} d^1 f(x_0)(h) = 3 + h_3 \\ (T_{x_0}^2 f)(h) &= (T_{x_0}^1 f)(h) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0)(h) = 3 + h_3 - \frac{1}{2} h_1^2 - \frac{1}{2} h_2^2 + \frac{1}{2} h_3^2. \end{aligned}$$

Esimerkki 4.3.8. Olkoon $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin, C^{p+1} -funktio ja $a \in \mathcal{G}$. Taylorin polynomi $(T_a^p f)(x - a)$ antaa pisteen a ympäristössä funktiolle f polynomiaprossimaation:

$$\begin{aligned} |f(x) - (T_a^p f)(x - a)| &= \left| \frac{1}{(p+1)!} d^{p+1} f(z)(x - a) \right| \\ &\leq \sum_{k_1 + \dots + k_n = p+1} \frac{1}{k_1! \dots k_n!} \left| \partial_1^{k_1} \dots \partial_n^{k_n} f(z) \right| \|x - a\|^{p+1} \end{aligned}$$

Jos rajoitetaan tarkastelu suljettuun palloon $\bar{B}(a, r) \subset \mathcal{G}$, niin

$$\sum_{k_1 + \dots + k_n = p+1} \frac{1}{k_1! \dots k_n!} \left| \partial_1^{k_1} \dots \partial_n^{k_n} f(y) \right| \leq M,$$

jollain $M > 0$ ja kaikille $y \in \bar{B}(a, r)$.

Siis

$$|f(x) - (T_a^p f)(x - a)| \leq M \|x - a\|^{p+1}, \text{ kunhan } \|x - a\| \leq r. \quad (4.3.9)$$

Esimerkki 4.3.10. Jos $r = 10^{-1}$, niin

$$|f(x) - (T_a^p f)(x - a)| \leq M r^{p+1} = M \left(\frac{1}{10} \right)^{p+1},$$

kunhan $\|x - a\| \leq 10^{-1}$.

Huomautus 4.3.11. Suoraan jatkuvuuden ja homogeenisuuden avulla:

1. Jatkuvuudesta seuraa, että

$$\left| d^{p+1} f(y)(v) \right| \leq k_1$$

jollain $k_1 > 0$, kun $y \in \bar{B}(a, r)$ ja $\|v\| = 1$.

2. Jos $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$, $v = \frac{u}{\|u\|}$, niin homogeenisuuden nojalla

$$\left| d^{p+1} f(y)(u) \right| = \left| d^{p+1} f(y)(v \|u\|) \right| = \|u\|^{p+1} \left| d^{p+1} f(y)(v) \right| \leq k_1 \|u\|^{p+1}.$$

4.3.12 Taylorin polynomin tarkkuus- ja yksikäsitteisyyslause

Olkoon $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ polynomi, jonka aste on enintään $p \geq 0$. Jos pisteen $a \in \mathbb{R}^n$ ympäristössä $B(a, r)$ pätee

$$P(x) = \|x - a\|^p \varepsilon(x - a), \text{ missä } \varepsilon(u) \rightarrow 0, \text{ kun } u \rightarrow 0, \text{ niin } P \equiv 0.$$

(Luetaan: P on identtisesti 0.)

Lause 4.3.13. Taylorin polynomin tarkkuus- ja yksikäsitteisyyslause.

Olkoon $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin, C^{p+1} -funktio, $p \geq 0$. Olkoon $a \in \mathcal{G}$. Silloin jokaisessa pallossa $\bar{B}(a, r) \subset \mathcal{G}$, $r > 0$, on voimassa

$$f(x) = (T_a^p f)(x - a) + \|x - a\|^p \varepsilon(x - a), \text{ kaikilla } x \in \bar{B}(a, r),$$

missä $\varepsilon(h) \rightarrow 0$, kun $h \rightarrow 0$.

Toisaalta, jos p -asteiselle polynomille $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on jollakin $r > 0$ voimassa

$$f(x) = P(x) + \|x - a\|^p \varepsilon(x - a), \text{ kun } x \in \bar{B}(a, r) \subset \mathcal{G},$$

niin $P(x) = (T_a^p f)(x - a)$.

Esimerkki 4.3.14. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$. Nyt $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ja

$$\begin{aligned} \partial_i f(x) &= 2x_i & \partial_{ji} f(x) &= 0, \text{ kun } j \neq i \\ \partial_{ii} f(x) &= 2 & \partial_{kji} f(x) &= 0. \end{aligned}$$

Siis, kun $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} d^1 f(x)u &= 2 \sum_{i=1}^n x_i u_i = 2x \cdot u \\ d^2 f(x)u &= \sum_{k_1 + \dots + k_n = 2} \binom{2}{k_1 \dots k_n} \partial_1^{k_1} \dots \partial_n^{k_n} f(x) u_1^{k_1} \dots u_n^{k_n} \\ &= \binom{2}{2 \ 0 \ \dots \ 0} 2u_1^2 + \dots + \binom{2}{0 \ \dots \ 0 \ 2} 2u_n^2 \\ &= 2(u_1^2 + \dots + u_n^2) = 2\|u\|^2 \\ d^3 f(x)u &= 0, \text{ kun } k \geq 3. \end{aligned}$$

Nyt saadaan

$$\begin{aligned} (T_x^1 f)(u) &= f(x) + \frac{1}{1!} d^1 f(x)(u) = \|x\|^2 + 2x \cdot u \\ (T_x^2 f)(u) &= (T_x^1 f)(u) + \frac{1}{2!} d^2 f(x)(u) = \|x\|^2 + 2x \cdot u + \frac{1}{2} 2\|u\|^2 = \|x\|^2 + 2x \cdot u + \|u\|^2 \\ &= \|x + u\|^2 \\ (T_x^k f)(u) &= (T_x^2 f)(u) = \|x + u\|^2, \text{ kun } k \geq 2. \end{aligned}$$

Erityisesti $(T_0^k f)(u) = \|u\|^2 = f(u)$, kun $k \geq 2$.

4.4 Kriittiset pisteet ja lokaalit ääriarvot

4.4.1 Ääriarvojen määritelmä

Reaaliarvoiselle funktiolle $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ joukko, on pisteessä $x_0 \in \mathcal{A}$

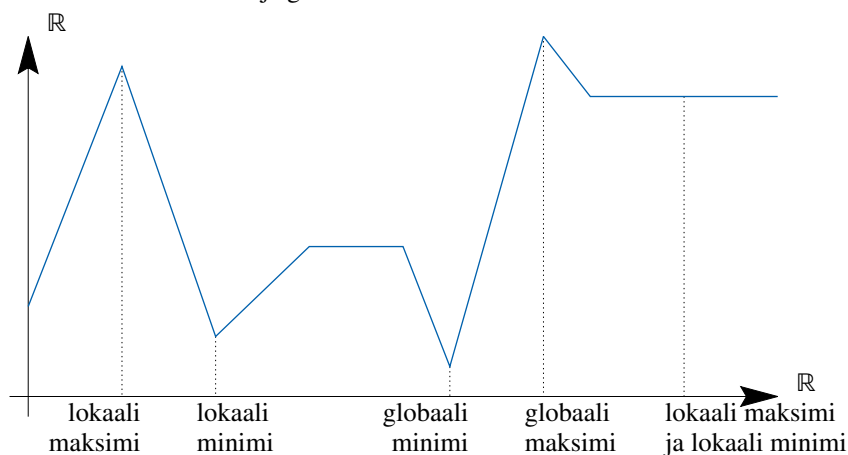
1. (globaali) maksimi $f(x_0)$, jos $f(x) \leq f(x_0)$ kaikilla $x \in \mathcal{A}$,

2. (globaali) minimi $f(x_0)$, jos $f(x) \geq f(x_0)$ kaikilla $x \in \mathcal{A}$,
3. lokaali (eli paikallinen) maksimi $f(x_0)$, jos pisteellä $x_0 \in \mathcal{A}$ on olemassa ympäristö $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $f(x) \leq f(x_0)$ kaikilla $x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{A}$,
4. lokaali (eli paikallinen) minimi $f(x_0)$, jos pisteellä $x_0 \in \mathcal{A}$ on olemassa ympäristö $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $f(x) \geq f(x_0)$ kaikilla $x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{A}$.

Piste x_0 on funktion f ääriarvopiste joukossa \mathcal{A} ja $f(x_0)$ on funktion f ääriarvo.

Jos edellä olevissa ehtoissa on voimassa erisuuruusmerkki, kun $x \neq x_0$, niin kyseessä oleva ääriarvo on aito.

Esimerkki 4.4.2. Funktion lokaaleista ja globaaleista ääriarvoista.



Kuva 34: Esimerkkifunktion $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ lokaalit ja globaalit ääriarvot.

Huomautus 4.4.3 (Muistutus metrisistä avaruuksista). Kompaktissa joukossa jatkuva funktio saavuttaa sekä maksiminsa, että miniminsä tässä joukossa.

Kompaktiustulos ei kerro, missä tarkalleen ääriarvopisteet joukossa sijaitsevat.

Ääriarvotehtävän tavoite on kuitenkin etsiä annetulle funktiolle ääriarvopisteet annetussa joukossa ja siten myös ääriarvot.

Esimerkki 4.4.4. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 - 2x_1e^{x_2} + e^{2x_2}$.

Tällöin $f(x) = (x_1 - e^{x_2})^2 \geq 0$ kaikilla $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ja $f(x) = 0$, jos ja vain jos $x_1 = e^{x_2}$.

Siis funktiolla f on olemassa minimipiste jokaisessa $x = (e^t, t), t \in \mathbb{R}$.

Seuraavassa on tarkoitus tutkia lähinnä lokaalien maksimien ja lokaalien minimien löytämistä.

Huomautus 4.4.5 (Muistutus). Jos $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin, on differentioituva kuvaus joukossa \mathcal{G} , niin voimakkaimman kasvun suunnan pisteessä $x \in \mathcal{G}$ antaa gradientti $\nabla f(x)$.

Lause 4.4.6. Olkoon $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Jos $x_0 \in \mathcal{G}$ on funktion $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ lokaali ääriarvopiste ja suunnattu derivaatta $\partial_e f(x_0) \in \mathbb{R}$ on olemassa pisteessä x_0 suuntaan $e, \|e\| = 1$, niin $\partial_e f(x_0) = 0$.

Huomautus 4.4.7. Edellisessä lauseessa on oletus: oletetaan, että suunnattu derivaatta on olemassa. Tämä toteutuu ainakin kun funktio f on differentioituva.

Lauseen 4.4.6 todistus. Olkoon $x_0 \in \mathcal{G}$ lokaali minimipiste. Tällöin on olemassa pisteen x_0 avoin pallo-
ympäristö

$$B(x_0, r) \subset \mathcal{G},$$

siten, että $f(x) \geq f(x_0)$, kun $x \in B(x_0, r)$. Pallo $B(x_0, r) \subset \mathcal{G}$ jollain $r > 0$, koska \mathcal{G} on avoin.

Nyt, koska $\partial_e f(x_0)$ on olemassa saadaan

$$\begin{aligned} \partial_e f(x_0) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t} \\ &= \lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ r > t > 0}} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t} \geq 0 \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \partial_e f(x_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t} \\ &= \lim_{\substack{t \rightarrow 0^- \\ -r < t < 0}} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t} \leq 0 \end{aligned}$$

Siis $\partial_e f(x_0) = 0$.

Lokaalin maksimin tapaus todistetaan vastaavasti. □

Korollaari 4.4.8. *Olkoon $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin, differentioituva kuvaus.
Jos piste $x_0 \in \mathcal{G}$ on funktion f lokaali ääriarvopiste niin*

$$\nabla f(x_0) = 0 \tag{4.4.9}$$

Korollaarin 4.4.8 todistus. Koska f on differentioituva, niin sen suunnatut derivaatat ovat olemassa ja erityisesti kantavektoreiden e_1, e_2, \dots, e_n suuntaan, $\|e_j\| = 1$. Siis osittaisderivaatat ovat olemassa ja lauseen 4.4.6 nojalla

$$\partial_i f(x_0) = 0$$

jokaiselle $i = 1, 2, \dots, n$. Siis

$$\nabla f(x_0) = (\partial_1 f(x_0), \dots, \partial_n f(x_0)) = (0, \dots, 0) = 0$$

□

Korollaari 4.4.10. *Olkoon $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin, differentioituva kuvaus.*

Jos $x_0 \in \mathcal{G}$ on funktion lokaali ääriarvopiste, niin

$$df(x_0) = 0 \text{ (nollakuvaus)}$$

Muistutus!

$$df(x_0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

$$\nabla f(x_0) \in \mathbb{R}^n.$$

Edellä siis annoimme välttämättömiä ehtoja lokaalin ääriarvon olemassa ololle. Eli lokaalit ääriarvopisteet löytyvät esimerkiksi ehdon (4.4.8) toteuttavien pisteiden joukosta, mutta tämä ehto (4.4.8) ei ole riittävä.

4.4.11 Kriittisen pisteen ja satulapisteen määritelmä

Olkoon $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, differentioituva, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin.

1. Piste $x_0 \in \mathcal{G}$ on funktion kriittinen piste, jos $\nabla f(x_0) = 0$.
2. Kriittinen piste on satulapiste, jos se ei ole ääriarvopiste.

Esimerkki 4.4.12.

1. Olkoon

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2.$$

Kriittiset pisteet

$$\nabla f(x_1, x_2) = (2x_1, 2x_2) = (0, 0),$$

jos ja vain jos $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

Nyt $(0,0)$ on aito globaali minimipiste, sillä $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2) > 0$, kun $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$.

2. Olkoon

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, g(x_1, x_2) = x_1 x_2.$$

Kriittiset pisteet

$$\nabla g(x_1, x_2) = (x_2, x_1) = (0, 0)$$

jos ja vain jos $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

Mutta $(0,0)$ ei ole ääriarvopiste, sillä kaikilla $t \neq 0$,

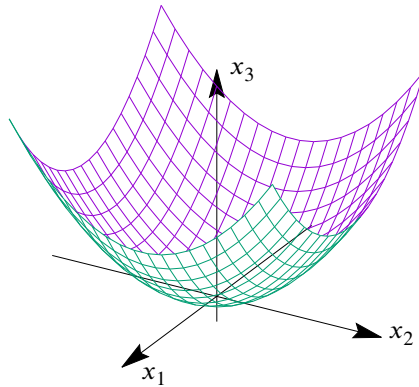
$$\begin{aligned} g(t, -t) &= -t^2 < 0 \\ &= g(0, 0) < t^2 \\ &= g(t, t). \end{aligned}$$

Eli g saa jokaisessa origon ympäristössä sekä positiivisia että negatiivisia arvoja. Siis $(0,0)$ on satulapiste.

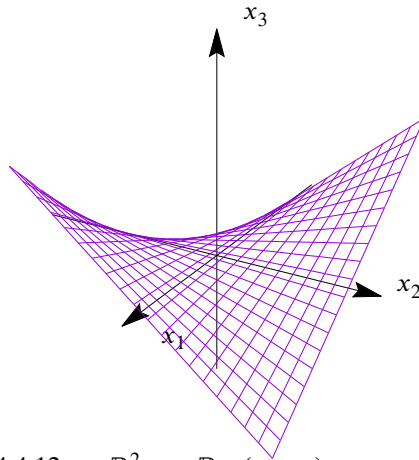
3. Olkoon

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 - x_2^2$$

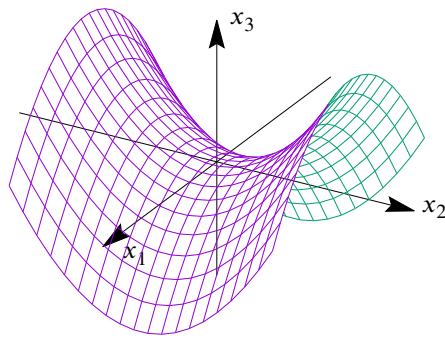
Esimerkki käydään läpi viimeisellä luennolla. Katso huomautus 4.4.17 (c).



Kuva 35: Esimerkin 4.4.12 funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ graafi, jossa $x_3 = f(x_1, x_2)$.



Kuva 36: Esimerkin 4.4.12 $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, g(x_1, x_2) = x_1 x_2$ graafi, jossa $x_3 = g(x_1, x_2)$.



Kuva 37: Esimerkin 4.4.12 funktion $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 - x_2^2$ graafi, jossa $x_3 = h(x_1, x_2)$.

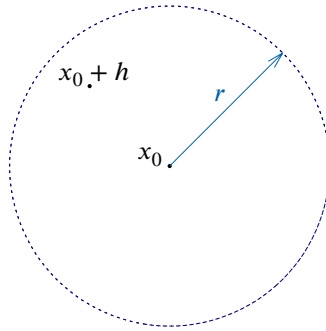
4.4.13 Mahdollisten ääriarvopisteiden laadun etsiminen.

Tutkimme seuraavassa miten kriittisestä pisteestä voidaan päätellä, onko kyseessä oleva piste lokaali minimipiste, lokaali maksimipiste vai satulapiste.

Jos $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$ avoin, on C^3 -funktio ja $x_0 \in \mathcal{G}$ on funktion f kriittinen piste, niin Taylorin polynomin tarkkuus- ja yksikäsitteisyys lauseen nojalla jossakin avoimessa palloympäristössä $B(x_0, r) \subset \mathcal{G}$ pätee

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) &= df(x_0)h + \frac{1}{2!}d^2f(x_0)h + \|h\|^2 \varepsilon(h) \\ &= \frac{1}{2}d^2f(x_0)h + \|h\|^2 \varepsilon(h), \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

missä $\varepsilon(h) \rightarrow 0$, kun $\|h\| \rightarrow 0$, $x_0 + h \in B(x_0, r)$.



Kuva 38: Piste $x_0 + h$ pisteen x_0 pienessä avoimessa pallossa $B(x_0, r)$.

Olkoon $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$ ja x_0 kriittinen piste siten, että

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) &\approx \nabla f(x_0)h + \frac{1}{2!}d^2f(x_0)h \\ &= 0 + \frac{1}{2!}d^2f(x_0)h. \end{aligned}$$

Määritelmän perusteella

$$d^2f(x_0)h = \frac{1}{2} \left(\partial_{11}f(x_0)h_1^2 + 2\partial_{12}f(x_0)h_1h_2 + \partial_{22}f(x_0)h_2^2 \right).$$

Merkitään

$$\begin{aligned} a &:= \partial_{11}f(x_0) \neq 0 & b &:= 2\partial_{12}f(x_0) & c &:= \partial_{22}f(x_0) \\ h_1 &:= x & h_2 &:= y \end{aligned}$$

Silloin

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) &\approx \frac{1}{2} \left(ax^2 + bxy + cy^2 \right) \\ &= \frac{1}{2}a \left(x^2 + \frac{b}{a}xy + \frac{c}{a}y^2 \right) \\ &= \frac{1}{2}a \left(\left(x + \frac{b}{2a}y \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}y^2 + \frac{c}{a}y^2 \right). \end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) &\approx \frac{1}{2}a \left(\left(x + \frac{b}{2a}y \right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) y^2 \right) \\ &= \frac{1}{2}a \left(\left(x + \frac{b}{2a}y \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} y^2 \right). \end{aligned}$$

Tästä nähdään

1. Jos $4ac - b^2 > 0$ ja $a > 0$, niin $f(x_0 + h) > f(x_0)$ ja siis x_0 on lokaali minimipiste.
2. Jos $4ac - b^2 > 0$ ja $a < 0$, niin $f(x_0 + h) < f(x_0)$ ja siis x_0 on lokaali maksimipiste.

Jos siis

$$\partial_{11}f(x_0)\partial_{22}f(x_0) - (\partial_{12}f(x_0))^2 > 0$$

ja $\partial_{11}f(x_0) > 0$, niin x_0 on lokaali minimipiste.

Jos

$$\partial_{11}f(x_0)\partial_{22}f(x_0) - (\partial_{12}f(x_0))^2 > 0$$

ja $\partial_{11}f(x_0) < 0$, niin x_0 on lokaali maksimipiste.

Lause 4.4.15. Oletetaan, että $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ on C^3 funktio avoimessa joukossa $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$ ja $x_0 \in \mathcal{G}$ on funktion f kriittinen piste.

1. Jos

$$\partial_{11}f(x_0)\partial_{22}f(x_0) - (\partial_{12}f(x_0))^2 > 0$$

ja $\partial_{11}f(x_0) > 0$, niin x_0 on lokaali aito minimipiste.

2. Jos

$$\partial_{11}f(x_0)\partial_{22}f(x_0) - (\partial_{12}f(x_0))^2 > 0$$

ja $\partial_{11}f(x_0) < 0$, niin x_0 on lokaali aito maksimipiste.

3. Jos

$$\partial_{11}f(x_0)\partial_{22}f(x_0) - (\partial_{12}f(x_0))^2 < 0,$$

niin x_0 on satulapiste.

Esimerkki 4.4.16. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$. Etsi funktion f lokaalit ääriarvot.

Ratkaisuehdotus: Nyt selvästi $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$.

1. Kriittiset pisteet:

$$\nabla f(x_1, x_2) = (3x_1^2 - 3x_2, 3x_2^2 - 3x_1) = (0, 0)$$

$$\begin{cases} 3x_1^2 - 3x_2 = 0 \\ 3x_2^2 - 3x_1 = 0, \end{cases}$$

jos ja vain jos

$$(x_1, x_2) = (0, 0) \text{ tai } (x_1, x_2) = (1, 1).$$

Siis kriittiset pisteet ovat (0,0) ja (1,1).

2. laatu:

$$\begin{aligned} & \partial_{11}f(x_1, x_2)\partial_{22}f(x_1, x_2) - (\partial_{12}f(x_1, x_2))^2 \\ &= 6x_16x_2 - (-3)^2 \\ &= 36x_1x_2 - 9 \end{aligned}$$

$$(x_1, x_2) = (0, 0)$$

$$\begin{aligned} & \partial_{11}f(0, 0)\partial_{22}f(0, 0) - (\partial_{12}f(0, 0))^2 \\ &= -9 < 0, \end{aligned}$$

siis origo on satulapiste.

$$(x_1, x_2) = (1, 1)$$

$$\begin{aligned} & \partial_{11}f(1, 1)\partial_{22}f(1, 1) - (\partial_{12}f(1, 1))^2 \\ &= 36 - 9 \\ &= 27 > 0, \end{aligned}$$

ja $\partial_{11}f(1, 1) = 6 > 0$ siis (1,1) on lokaali minimipiste ja $f(1, 1) = -1$ on minimi.

Huomautus 4.4.17. Oletetaan, että $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$ avoin, on C^3 -funktio ja $x_0 \in \mathcal{G}$ on kriittinen piste. Jos

$$\partial_{11}f(x_0)\partial_{22}f(x_0) - (\partial_{12}f(x_0))^2 = 0$$

voi tapahtua mitä vain.

- (a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1^4 + x_2^4$. Funktiolla f on origossa lokaali minimi, itseasiassa globaali minimi.

I Kriittiset pisteet

$$\partial_1 f(x_1, x_2) = 4x_1^3$$

$$\partial_2 f(x_1, x_2) = 4x_2^3$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = 0, \text{ joss } (x_1, x_2) = (0, 0).$$

Origo on kriittinen piste.

II Kriittisen pisteen laatu: $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned}\partial_{11}f(x_1, x_2) &= 12x_1^2 \\ \partial_{22}f(x_1, x_2) &= 12x_2^2 \\ \partial_{12}f(x_1, x_2) &= \partial_{21}f(x_1, x_2) = 0 \\ \partial_{11}f(0, 0)\partial_{22}f(0, 0) - (\partial_{12}f(0, 0))^2 &= 0.\end{aligned}$$

Lause 4.4.15 ei sano/kerro mitään. Tutkittava erikseen.

Nyt kuitenkin

$$f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 > 0 = f(0, 0) \text{ kaikilla } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Siis origo on lokaaliminimipiste ja (globaali) minimi on $0 = f(0)$.

(b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto -x_1^4 - x_2^4$. Funktiolla f on origossa maksimi.

(c) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1^4 - x_2^4$ funktiolla f on origossa satulapiste.

I Kriittiset pisteet: $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned}\partial_1 f(x_1, x_2) &= 4x_1^3 \\ \partial_2 f(x_1, x_2) &= -4x_2^3 \\ \nabla f(x_1, x_2) &= (\partial_1 f(x_1, x_2), \partial_2 f(x_1, x_2)) \\ &= (4x_1^3, -4x_2^3) = (0, 0) \text{ joss } (x_1, x_2) = (0, 0).\end{aligned}$$

II Kriittisen pisteen laatu: $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned}\partial_{11}f(x_1, x_2) &= 12x_1^2 \\ \partial_{22}f(x_1, x_2) &= -12x_2^2 \\ \partial_{12}f(x_1, x_2) &= \partial_{21}f(x_1, x_2) = 0.\end{aligned}$$

Nyt

$$\begin{aligned}f(x_1, 0) &= x_1^4 > 0, \text{ kun } x_1 \neq 0 \\ f(0, x_2) &= -x_2^4 < 0, \text{ kun } x_2 \neq 0.\end{aligned}$$

Origin pienessä palloympäristössä funktio f saa positiivisia ja negatiivisia arvoja. Siis origo ei ole ääriarvopiste. Määritelmän 4.4.11 mukaan kriittinen piste, joka ei ole ääriarvopiste, on satulapiste.

Huomautus 4.4.18. Jos $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$ avoin, on C^3 -funktio ja $x_0 \in \mathcal{G}$ on funktion f kriittinen piste, niin Taylorin polynomin tarkkuus- ja yksikäsitteisyyslauseen nojalla jossakin avoimessa palloympäristössä $B(x_0, r) \subset \mathcal{G}$ pätee

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) &= df(x_0)(h) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0)h + \|h\|^2 \varepsilon(h) \\ &= \frac{1}{2}d^2f(x_0)h + \|h\|^2 \varepsilon(h), \end{aligned}$$

missä $\varepsilon(h) \rightarrow 0$, kun $\|h\| \rightarrow 0$, $x_0 + h \in B(x_0, r)$.

$$\begin{aligned} d^2f(x_0)(h) &= \partial_{11}f(x_0)h_1^2 + 2\partial_{12}f(x_0)h_1h_2 + \partial_{22}f(x_0)h_2^2 > 0 \\ &\begin{cases} \partial_{11}f(x_0)\partial_{22}f(x_0) - (\partial_{12}f(x_0))^2 > 0 \\ \partial_{11}f(x_0) > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Huomautus 4.4.19. Toisen kertaluvun differentiaali $d^2f(x_0)(h)$ on jatkuva ja homogeeninen joten

$$\begin{aligned} \alpha\|h\|^2 &\leq d^2f(x_0)(h) \leq \beta\|h\|^2, \forall h \in \mathbb{R}^2 \\ \alpha &= \min \left\{ d^2f(x_0)(v) : \|v\| = 1 \right\} \\ \beta &= \max \left\{ d^2f(x_0)(v) : \|v\| = 1 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2f(x_0)(h) > 0 &\quad \forall h \neq 0 \text{ joss } \alpha > 0 \\ d^2f(x_0)(h) < 0 &\quad \forall h \neq 0 \text{ joss } \beta > 0. \end{aligned}$$

Lauseen 4.4.15 todistuksesta.

1. Jos $d^2f(x_0)(h) > 0$ kaikilla $h \neq 0$, niin on olemassa $\alpha > 0$ siten, että

$$d^2f(x_0)(h) \geq \alpha\|h\|^2 \text{ kaikilla } h \in \mathbb{R}^n.$$

Edelleen voidaan valita $\delta, 0 < \delta \leq r$, jolle $|\varepsilon(h)| < \frac{\alpha}{4}$, kun $\|h\| < \delta$.
Siis x_0 on aito lokaali minimipiste. Määritelmän 4.4.1 mukaan.

2. Jos $d^2f(x_0)(h) < 0$ kaikilla $h \neq 0$ niin edellinen päättely funktiolle $-f$, jolloin saadaan x_0 on aito lokaali maksimipiste.
3. Jos $d^2f(x_0)(h) > 0$ jollain h ja $d^2f(x_0)(u) < 0$ jollain u , niin olemassa yksikkövektorit $e \in \mathbb{R}^2$ ja $v \in \mathbb{R}^2$ joille

$$\begin{aligned} \alpha &:= d^2f(x_0)(e) < 0 \\ \beta &:= d^2f(x_0)(v) > 0. \end{aligned}$$

$d^2f(x_0)(h) > 0$ kaikilla $h \neq 0$, jos ja vain jos $\alpha > 0$. Olkoon $0 < \delta \leq r$, siten että

$$|\varepsilon(h)| < \frac{1}{4} \min \{|\alpha|, \beta\}, \text{ kun } \|h\| < \delta.$$

Silloin jokaiselle $0 < t < \delta$

$$\begin{aligned}f(x_0 + tv) - f(x_0) &= \frac{1}{2}d^2f(x_0)(tv) + \|tv\|^2 \varepsilon(tv) \\&= \frac{1}{2}t^2\beta + \|tv\|^2 \varepsilon(tv) \\&= \frac{1}{2}t^2\beta + t^2\varepsilon(tv) \\&> \frac{1}{2}t^2\beta - \frac{1}{4}t^2\beta = \frac{1}{4}t^2\beta > 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x_0 + te) - f(x_0) &= \frac{1}{2}d^2f(x_0)(te) + \|te\|^2 \varepsilon(te) \\&= t^2\frac{1}{2}d^2f(x_0)(e) + t^2\varepsilon(te) \\&< t^2\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}t^2|\alpha| = \frac{1}{4}t^2\alpha < 0.\end{aligned}$$

Siis piste x_0 on satulapiste.

□

Viitteet

- [1] Apostol Tom, *Mathematical Analysis*
- [2] Hurri Ritva, *Differentiaalilaskenta luennot*
- [3] Martio Olli, *Vektorianalyysi*, 2004: Limes Ry
- [4] Purmonen Veikko, *Differentiaalilaskentaa Euklidisissa avaruuksissa*, luentomoniste, Jyväskylän yliopisto.
- [5] Spiegel Murray, *Advanced Calculus*, Schaum-sarja
- [6] Stewart James, *Calculus, Early Transcendentals*, Sixth Edition.
- [7] Väisälä Jussi, *Topologia 1*