VEKTORIANALYYSI I
2018, Laskuharjoitukset 2

1. Osoita, että avoin pallo on avoin joukko ja suljettu pallo on suljettu joukko.

2. Määritellään $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{if } x = y = 0 \\ \frac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq 0 \end{cases} .$$

Tutki onko funktiot f, f_x and f_y jatkuvia.

3. Osoita, että kuvaus $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y,z) = xy + z^2$$

on jatkuva.

4. Osoita, että kuvaus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \|x\|$$

on jatkuva.

5. Oletetaan, että funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ toteuttaa ehdon

$$|f(x,y)| \leq x^2 + y^2$$

jokaiselle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Osoita, että funktiolla f on pisteessä $(0,0)$ osittaisderivaatat sekä x:n että y:n suhteen.

6. Määritellään

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\frac{y^2}{x}\right), & \text{kun } x \neq 0, \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Osoita, että f on jatkuva origossa ja sillä on osittaisderivaatat kaikkialla.