HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus logiikkaan I, syksy 2018
Harjoitus 1 – Ratkaisuehdotukset

1. Annetaan propositiosymboleille p_0, p_1 ja p_2 merkitys seuraavasti:

   p_0: Sataa
   p_1: Tuulee
   p_2: Myrskyää

   Esitä luonnollisella kielellä mitä lauseet

   (a) $(p_2 \to (p_1 \lor p_0))$,
   (b) $((p_2 \to p_1) \lor p_0)$,

   ilmaisevat.

   Ratkaisu:

   (a) Jos myrskyää, niin tuulee tai sataa.

   (b) Sataa, tai mikäli myrskyää niin tuulee.

2. Tarkastellaan lausetta ”Sataa mutta ei myrskyä paitsi jos tuulee”. Onko lause totta jos

   (a) ei sada, myrskyää ja tuulee,
   (b) sataa, myrskyää ja ei tuule.

   Ratkaisu:

   (a) Koska ei sada, lause ei ole totta.

   (b) Koska myrskyää vaikkei tuule, lause ei ole totta.

   Lauseen voi tulkita propositiologiikan lauseeksi monella tavalla, joten vastauksia on monia (kts. tehtävä 3).

3. Annetaan propositiosymboleille merkitykset tehtävän 1 tapaan. Käännä tehtävän 2 lause propositiologiikan kielelle.

   Ratkaisu:

   Koska lauseesta ei käy yksikäsitteisesti ilmi, mihin osaan ‘paitsi jos’ viittaa, voi lauseen suluttaa kahdella tapaa: “(sataa mutta ei myrskyä) paitsi jos tuulee” ja “sataa mutta (ei myrskyä paitsi jos tuulee)”, joten käypiä tulkintoja on monta.

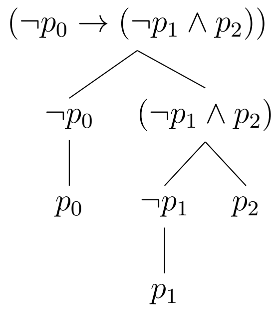
Tehtävän 1 merkityksillä jälkimmäinen sulutus voidaan tulkita muotoon $(p_0 \wedge (p_2 \to p_1))$. “Ei myrskyä, paitsi jos tuulee” tarkoittaa, että myrskystä on pakko seurata tuuleminen.

4. Mitkä seuraavista ovat propositiologiikan lauseita:
   (a) $(\neg p_0 \to (\neg p_1 \wedge p_2))$,
   (b) $\neg(p_0 \to \neg p_1) \wedge p_2$,
   (c) $\neg((p_0 \to \neg p_1) \wedge p_2)$,
   (d) $((\neg p_0) \to (\neg p_1 \wedge p_2))$?

   Perustele vastauksesi.

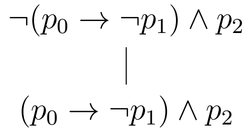
   Ratkaisu:

   (a) Merkkijono on propositiologiikan lause, sen voi konstruoida määritelmän 1.1 säännöillä. Tätä voi havainnollistaa rakennepuulla:



   Puun lehtisolmut p_0, p_1 ja p_2 ovat propositiosymboleina propositiolauseita, ja sisäsolmut saadaan muodostettua niiden lapsisolmuista jollakin propositiolauseiden viidestä luontisäännöstä.

   (b) Merkkijono ei ole propositiologiikan lause, koska konjunktion uloimmat sulut puuttuvat. Tarkemmin perustellen, koska negaatiosääntö on ainoa luontisääntö, joka luo negaatiolla alkavan lauseen, täytyisi lauseen rakennepuun alkaa seuraavasti:



Kuitenkin luontisäännöistä nähdään, että minkä tahansa kaksipaikkaisen konnektiivin sisältävän lauseen tulee päättyä sulkumerkkiin), joten rakennepuu epäonnistuu.

(c) Merkkijono on propositiologiikan lause, kuten (a).

$$\neg((p_0 \to \neg p_1) \land p_2)$$

$$((p_0 \to \neg p_1) \land p_2)$$

$$(p_0 \to \neg p_1) \qquad p_2$$

$$p_0 \qquad \neg p_1$$

$$p_1$$

(d) Merkkijono ei ole propositiologiikan lause, sillä $\neg p_0$:n ympärillä ei saa olla sulkuja. Tarkemmin, lauseen pääkonnektiivin tulisi olla joko $\to$ tai $\land$, jolloin saataisiin allaolevat rakennepuut.

$$((\neg p_0) \to (\neg p_1 \land p_2))$$

$$(\neg p_0) \qquad (\neg p_1 \land p_2)$$

Tämä puu epäonnistuu, sillä vasemmanpuoleinen lehti $(\neg p_0)$ ei ole propositiolause. Kaksipaikkaisten konnektiivien luontisäännöt ovat ainoat säännöt, jotka lisäävät lauseeseen sulkuja, mutta $(\neg p_0)$:ssa ei ole yhtään kaksipaikkaista konnektiivia.

$$((\neg p_0) \to (\neg p_1 \land p_2))$$

$$(\neg p_0) \to (\neg p_1 \qquad p_2)$$

Tämä puu epäonnistuu, sillä oikeanpuoleinen (eikä vasemmanpuoleinen) lehti ole propositiolause. Ainoat propositiolauseet, jotka alkavat propositiosymbolilla, ovat yksittäisestä propositiosymbolista koostuvat lauseet.

Toinen tapa kumota merkkijonojen (b) ja (d) oikeellisuus on esimerkiksi osoittaa esimerkin 2.6 tyyliin, että jokaisessa propositiologiikan lauseessa konnektiivien $\wedge, \vee, \rightarrow$ ja $\leftrightarrow$ yhteenlaskettu määrä on sama kuin vasempien sulkumerkkien yhteenlaskettu määrä. Merkkijonossa (b) sulkumerkkejä on liian vähän, merkkijonossa (d) niitä on liikaa.

5. Mitkä ovat seuraavien lauseiden pääkonnektiivit?
   (a) $\neg((p_0 \vee p_1) \wedge (p_2 \vee p_3))$.
   (b) $(\neg(p_0 \vee p_1) \wedge (p_2 \vee p_3))$.

   Ratkaisu: (a) $\neg$, (b) $\wedge$.

6. Mitkä ovat tehtävän 5 lauseiden välittömät alilauseet?

   Ratkaisu:

   (a) $((p_0 \vee p_1) \wedge (p_2 \vee p_3))$
   (b) $\neg(p_0 \vee p_1)$ ja $(p_2 \vee p_3)$.

7. Näytä luonnollisten lukujen induktiolla, että kaikilla luonnollisilla luvuilla n pätee $0 + 1 + 2 + \cdots + n = n(n + 1)/2$.

   Ratkaisu:

   Alkuaskel: kun $n = 0$, niin yhtälön vasen puoli on yhden luvun summa 0, ja oikealla puolella on $0 \cdot (0 + 1)/2$, joten kaava pätee.

   Induktioaskel: oletetaan, että kaava pätee luvulle n. Nyt saadaan

$$
\begin{aligned}
0 + 1 + 2 + \cdots + n + (n + 1) &= (0 + 1 + 2 + \cdots + n) + (n + 1) \\
&= \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1) && \text{(induktio-oletus)} \\
&= \frac{n(n + 1) + 2(n + 1)}{2} && \text{(lavennus)} \\
&= \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}, && \text{(yhteinen tekijä)}
\end{aligned}
$$

   joten väite pätee myös luvulle $n + 1$.

   Siis väite pätee kaikille luonnollisille luvuille n.