Malliratkaisut, Harjoitus 1

---

1) Olkoon $x, y \in \mathbb{R}^n$. Pistetulon bilineaarisuuden nojalla

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 = (x+y)\cdot(x+y) = x\cdot x + 2x\cdot y + y\cdot y &\le x\cdot x + 2|x\cdot y| + y\cdot y \\ &= \|x\|^2 + 2|x\cdot y| + \|y\|^2.\end{aligned}$$

Schwartzin epayhtalon nojalla

$$\|x\|^2 + 2|x\cdot y| + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

eli

$$\|x+y\|^2 \le (\|x\| + \|y\|)^2,$$

josta väite seuraa ottamalla neliojuuren.

---

2) Olkoon $x, y \in \mathbb{R}^n$. Kolmioepayhtalon nojalla

$$\|x\| = \|x+y-y\| \le \|x+y\| + \|-y\| = \|x+y\| + \|y\|$$

ja

$$\|y\| = \|y+x-x\| \le \|y+x\| + \|-x\| = \|x+y\| + \|x\|$$

eli

$$\|x\| - \|y\| \le \|x+y\|$$

ja

$$\|y\| - \|x\| \le \|x+y\|$$

joista yhdistamalla saadaan

$$\max(\|x\| - \|y\|, \|y\| - \|x\|) \le \|x+y\|$$

josta väite seuraa, koska

$$|\|x\| - \|y\|| = \max(\|x\| - \|y\|, \|y\| - \|x\|).$$

---

3) Funktion g parametria $c \in \mathbb{R}$ vastaava tasa-arvokäyrä:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = c\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 - y^2 = c\}$$

Figuressa 1 tasa-arvokayrista arvoilla $c = -10, -5, -1, 0, 1, 5, 10$. Piirsin Wolfram Alphalla. Tapauksessa $c = 0$ saadaan $2x^2 - y^2 = 0$, eli $(\sqrt{2}x + y)(\sqrt{2}x - y) = 0$, eli joko $(\sqrt{2}x + y) = 0$ tai $(\sqrt{2}x - y) = 0$, mikä nakyy origoa leikkaavina suorina kuvassa. Funktion graafi:

$$\mathcal{G}_g := \{(x,y,w) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y) = w\} = \{(x,y,w) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 - y^2 = w\}$$

Kuva Figuressa 2. Kyseessä on satulapinta.

---

4) Olkoon $x, y \in \mathbb{R}^n$. Tasa-arvopinta vakiolla $c \in \mathbb{R}$:

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y) = c\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 + z^2 = c\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |(x,z)|^2 - y^2 = c\}$$

Jokainen poikkileikkaus $y = y_0$ (=vakio) toteuttaa origokeskisen ympyrän yhtalon $|(x,z)|^2 = c + y_0^2$ (=vakio) eli poikkileikkaukset tason $\{(x,y,z) : y = y_0\}$ kanssa ympyroita säteella $\sqrt{y_0^2 + c}$. Näista yhdistamalla saadaan Figure 3, jossa tasa-arvopintoja vakioilla $c = -1, 0, 1$,

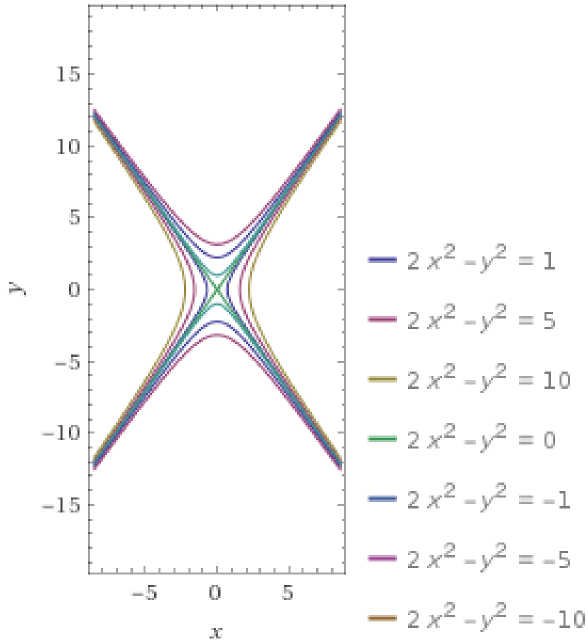

FIGURE 1.

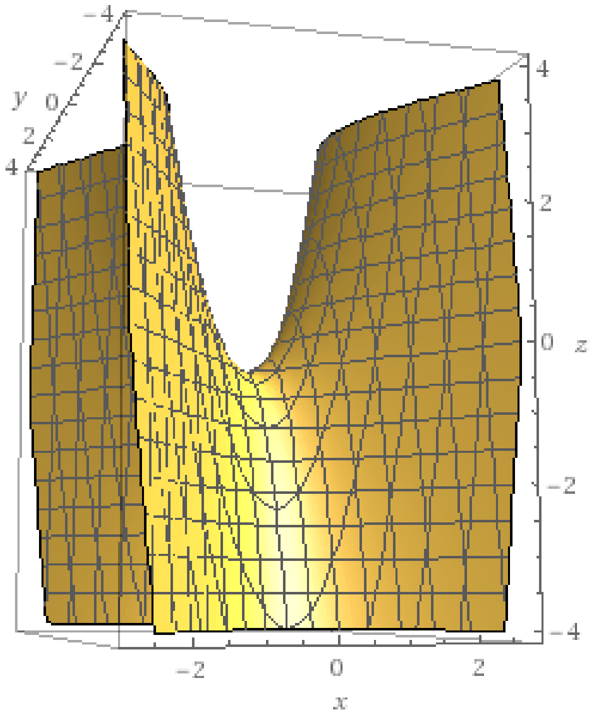

FIGURE 2.

vastaavassa jarjestyksessa. Nokkelat fyysikot saattavat muistaa kyseiset pinnat (suppeasta) suhteellisuusteoriasta. Mita fysikaalista suuretta vastaa parametri c?

---

5) Schwartzin mukaan: $|x \cdot y| \leq \|x\|\|y\|$. Valitaan $y = (1, \dots, 1)$ ja $x = (x_1, \dots, x_n)$. Tälloin yllä olevan nojalla

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x \cdot y \leq |x \cdot y| \leq \|y\|\|x\| = \|y\| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Edelleen

$$\|y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1^2} = \sqrt{2}$$

---

6) a) Tässä voi vaihtoehtoisesti vedota johonkin luentojen lauseeseen, jonka nojalla suppenemiseen riittää koordinaattien suppeneminen. Tämä on helppo todistaa itse, ellei usko. Lause myös kääntyy (käytä Schwartzin epayhtalöä saadaksesi majorantin $|f_i(k) - a_i| \leq \|(f_1(k), \dots, f_n(k)) - (a_1, \dots, a_n)\|$ kaikille $i = 1, \dots, n$).

Sitten itse tehtavään:

$$(\text{Analyysi } 1 \Rightarrow) \;\; k^{-1} \longrightarrow 0$$

kun $k \longrightarrow \infty$. Siispa

$$\|(2, k^{-1}, k^{-3}) - (2, 0, 0)\| = \sqrt{k^{-2} + k^{-6}} \leq \sqrt{k^{-2}} = k^{-1} \longrightarrow 0$$

b) Väite: Ei suppene.
Todistus antiteesilla: Suppeneepas. Tällöin,

$$\|(2k, 1, k^{-1}) - (a, b, c)\| \longrightarrow 0$$

jollain $a, b, c \in \mathbb{R}$ kun $k \longrightarrow \infty$. Schwartzin epayhtalon nojalla

$$\begin{aligned} |2k - a| = |(1,0,0) \cdot \big((2k, 1, k^{-1}) - (a, b, c)\big)| &\leq \|(1,0,0)\|\|(2k, 1, k^{-1}) - (a, b, c)\| \\ &= \|(2k, 1, k^{-1}) - (a, b, c)\| \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

joka on ristiriita, koska $|2k - a|$ kasvaa rajatta kun $k \longrightarrow \infty$.
c) Väite: Ei suppene.
Todistus antiteesilla: Suppeneepas johonkin (a, b, c). Tällöin taas Schwartzin epayhtalolla saadaan

$$\begin{aligned} |(-1)^k - a| = |(1,0,0) \cdot \big(((-1)^k, k^{-1}, k^{-2}) - (a, b, c)\big)| &\leq \|(1,0,0)\|\|((-1)^k, k^{-1}, k^{-2}) - (a, b, c)\| \\ &= \|((-1)^k, k^{-1}, k^{-2}) - (a, b, c)\| \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Siispa vuorotteleva sarja $(-1)^k = (-1, 1, -1, 1, \dots)$ suppenee, mika on ristiriita.

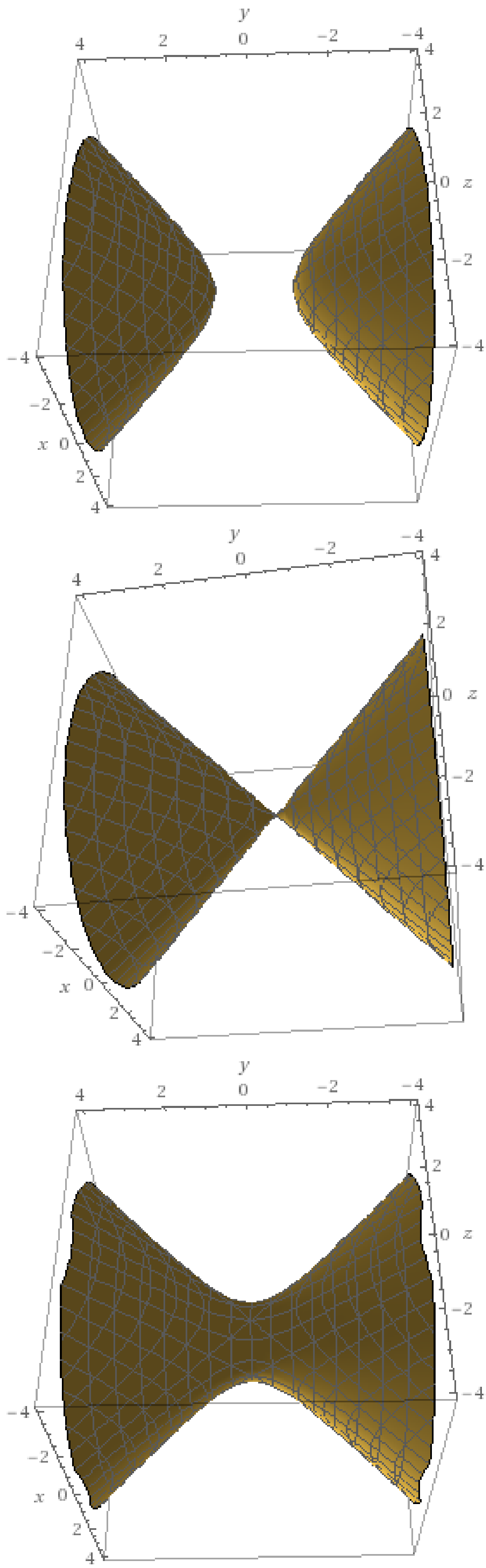
y
4 2 0 −2 −4
4 2 0 −2 −4 z
−4 −2 0 2 4 x
y
4 2 0 −2 −4
4 2 0 −2 −4 z
−4 −2 0 2 4 x
y
4 2 0 −2 −4
4 2 0 −2 −4 z
−4 −2 0 2 4 x

Figure 3.