HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Vektorianalyysi I, syksy 2018
Harjoitus 2 – Ratkaisuehdotukset

Tehtävä 1. Osoita, että avoin kuula on avoin joukko ja suljettu kuula on suljettu joukko.

Ratkaisu. Olkoon $B(x,r) \subseteq \mathbb{R}^n$ avoin kuula ja $y \in B(x,r)$. Osoitetaan, että on olemassa $\rho > 0$ siten, että $B(y,\rho) \subseteq B(x,r)$. Kuulan Määritelmän nojalla pätee:

$$\begin{aligned} r &> \|y-x\| \\ \Rightarrow \rho := r - \|y-x\| &> 0 \end{aligned}$$

Olkoon nyt $z \in B(y,\rho)$ ja osoitetaan, että $z \in B(x,r)$:

$$\begin{aligned} \|z-x\| &= \|z-y+y-x\| \\ &\leq \|z-y\| + \|y-x\| \\ &< \rho + \|y-x\| \\ &= r - \|y-x\| + \|y-x\| \\ &= r \end{aligned}$$

Piste $z \in B(y,\rho)$ oli mielivaltainen, joten $B(y,\rho) \subseteq B(x,r)$. Nyt ollaan siis löydetty kuulan $B(x,r)$ mielivaltaiselle pisteelle y ympäristö $B(y,\rho)$, joten kuula $B(x,r)$ on avoin.

Olkoon sitten $\bar{B}(x,r) \subseteq \mathbb{R}^n$ suljettu kuula. Osoitetaan, että $\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}(x,r)$ on avoin. Olkoon $y \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}(x,r)$. Kuulan määritelmän nojalla saadaan:

$$\begin{aligned} \|y-x\| &> r \\ \Rightarrow \rho := \|y-x\| - r &> 0 \end{aligned}$$

Osoitetaan sitten, että $B(y,\rho) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}(x,r)$. Olkoon $z \in B(y,\rho)$

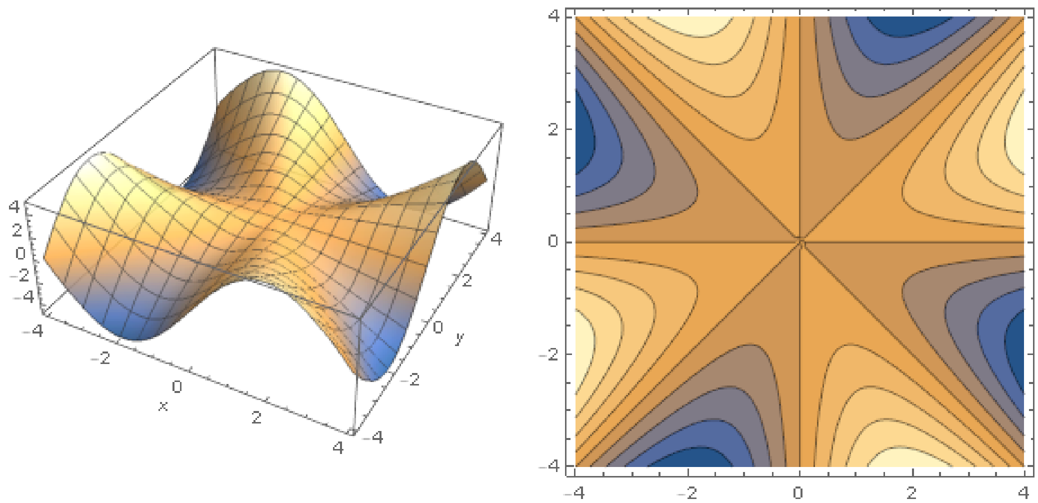
$$\begin{aligned} \|z-x\| &\geq \|y-x\| - \|z-y\| \\ &> \|y-x\| - \rho \\ &= \|y-x\| - \|y-x\| + r \\ &= r \end{aligned}$$

eli $z \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}(x,r)$, joten $\bar{B}(x,r)$ on suljettu.

Tehtävä 2. Määritellään $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{kun } (x,y) = 0 \\ \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{kun } (x,y) \neq 0 \end{cases}$$

Tutki ovatko funktiot $f, \partial_x f$ ja $\partial_y f$ jatkuvia.



Kuva 1: funktion f graafi ja tasa-arvokäyriä

Ratkaisu. Alueessa $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ f on rationaalifunktio, joten se on jatkuva, ja sen osittaisderivaatat ovat olemassa. Osoittajan termien aste on 2 korkeampi kuin nimittäjän, mikä viittaisi siihen, että sekä funktio itse että sen osittaisderivaatat lähestyvät nollaa origossa. Vahvistetaan nämä havainnot vielä eksplisiittisesti.

Osoitetaan, että f on jatkuva origossa. Olkoon $\varepsilon > 0$

$$
\begin{aligned}
|f(x,y)-f(0)| &= \left|\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right| \\
&= \frac{|xy||x^2-y^2|}{x^2+y^2} \\
&\le \frac{|xy||x^2+y^2|}{x^2+y^2} \\
&= |x||y| \\
&\le \|(x,y)\|^2 \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}
$$

kun $0 < \|(x,y)\| < \sqrt{\varepsilon}$.

Huomataan, että f on vakioarvoinen x-akselilla:

$$
\frac{f(h,0)-f(0)}{h} = \frac{h\cdot 0(h^2-0^2)}{h(h^2+0^2)} = 0,
$$

joten $\partial_x f(0) = 0$.

Alueessa $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ x-suuntaiselle arvolle saadaan seuraava lauseke:

$$
\begin{aligned}
\partial_x f(x,y) &= \frac{y(x^2-y^2)+2x^2y}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{y(3x^2-y^2)}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2},
\end{aligned}
$$

Osoitetaan sitten, että $\partial_x f$ on jatkuva origossa. Olkoon $\varepsilon > 0$

$$
\begin{aligned}
|\partial_x f(x,y) - \partial_x f(0)| &= \left|\frac{y(3x^2-y^2)}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right| \\
&\le \frac{|y|(|3x^2|+|y^2|)}{x^2+y^2} + \frac{2|x^2||y|(|x^2|+|y^2|)}{(x^2+y^2)^2} \\
&\le \frac{\|(x,y)\|(3\|(x,y)\|^2+\|(x,y)\|^2)}{\|(x,y)\|^2} \\
&\quad + \frac{2\|(x,y)\|^2\|(x,y)\|(\|(x,y)\|^2+\|(x,y)\|^2)}{\|(x,y)\|^4} \\
&= 8\|(x,y)\| \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}
$$

kun $0 < \|(x, y)\| < \frac{\varepsilon}{8}$.

Huomataan, että $f(x, y) = -f(y, x)\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Tästä saadaan relaatio x- ja y-osittaisderivaattojen välille:

$$\begin{aligned}
(\partial_y f)(x, y) &= \partial_y(f(x, y)) \\
&= -\partial_y(f(y, x)) \\
&= -(\partial_x f)(y, x),
\end{aligned}$$

joten x-derivaatan jatkuvuudesta seuraa myös y-derivaatan jatkuvuus.

Tehtävä 3. Osoita, että kuvaus $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y, z) = xy + z^2$$

on jatkuva.

Ratkaisu. Polynomifunktiona voidaan funktion f todeta olevan jatkuva. Todistetaan tämä kuitenkin vielä yksityiskohtaisemmin käyttäen ε, δ-menetelmää. Olkoon $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ ja $\varepsilon > 0$. Merkitään $r = (x, y, z)$ ja $r_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$$\begin{aligned}
|f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)| &= |xy + z^2 - x_0 y_0 - z_0^2| \\
&\leq |x(y - y_0) + y_0(x - x_0) + (z + z_0)(z - z_0)| \\
&\leq |x||y - y_0| + |y_0|x - x_0| + |z + z_0||z - z_0| \\
&\leq (|x - x_0| + |x_0|)|y - y_0| + |y_0||x - x_0| \\
&\quad + (|z - z_0| + 2|z_0|)|z - z_0| \\
&\leq (\|r - r_0\| + \|r_0\|)\|r - r_0\| + \|r_0\|\|r - r_0\| \\
&\quad + (\|r - r_0\| + 2\|r_0\|)\|r - r_0\| \\
&= (2\|r - r_0\| + 4\|r_0\|)\|r - r_0\| \\
&\leq (2 + 4\|r_0\|)\|r - r_0\| \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

kun $\|r - r_0\| < \min\left\{\frac{\varepsilon}{2+4\|r_0\|}, 1\right\}$.

Yllä on ensin hyödynnetty kolmioepäyhtälöä, sitten arvioitu vektorien komponenttien pituutta normilla ja lopuksi rajoituttu tarkastelemaan pisteitä $r \in B(r_0, 1)$.

Tehtävä 4. Osoita, että kuvaus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \|x\|$$

on jatkuva.

Ratkaisu. Tarkastellaan jatkuvuutta pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Seuraava arvio saadaan kolmioepäyhtälön avulla.

$$|f(x) - f(x_0)| = |\|x\| - \|x_0\|| \leq \|x - x_0\| \to 0,$$

kun $\|x - x_0\| \to 0$.

Kuvaus f on siis jatkuva pisteessä x_0 kaikilla $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Tehtävä 5. Oletetaan, että funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ toteuttaa ehdon

$$|f(x, y)| \leq x^2 + y^2$$

kaikilla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Osoita, että funktiolla f on pisteessä $0 \in \mathbb{R}^2$ osittaisderivaatat sekä x- että y-koordinaattien suhteen.

Ratkaisu. Huomataan ensin, että funktion f täytyy saavuttaa arvo 0 origossa:

$$|f(0)| \leq 0^2 + 0^2 = 0$$

Tarkastellaan x-osittaisderivaatan määrittävän erotusosamäärän itseiarvoa:

$$\left|\frac{f(h, 0) - f(0)}{h}\right| = \frac{|f(h, 0)|}{|h|} \leq \frac{|h|^2}{|h|} = |h| \to 0,$$

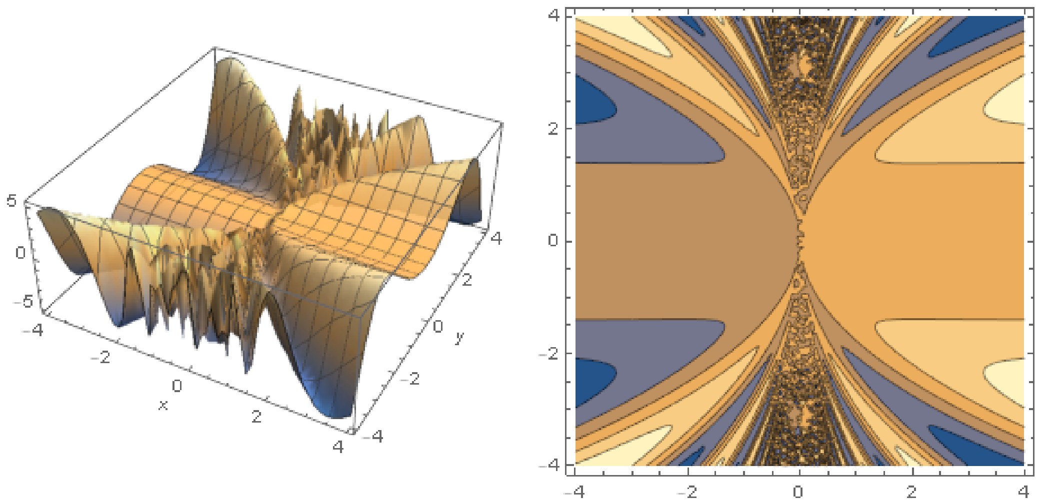
kun $h \to 0$.

Osittaisderivaatta $\partial_x f$ on siis olemassa origossa ja on arvoltaan 0. Osittaisderivaatta y-suuntaan saadaan aivan vastaavasti.

Tehtävä 6. Määritellään $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kaavalla

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \sin\left(\frac{y^2}{x}\right), & \text{kun } x \neq 0 \\ 0, & \text{kun } x = 0 \end{cases}$$

Osoita, että f on jatkuva origossa ja sillä on osittaisderivaatat joukossa $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup \{(0, 0)\}$



Kuva 2: funktion f graafi ja tasa-arvokäyriä

Ratkaisu. Tarkastellaan ensin jatkuvuutta origossa:

$$
\begin{aligned}
|f(x,y) - f(0)| &\leq \left| \sqrt{x^2+y^2} \sin\left(\frac{y^2}{x}\right) \right| \\
&= \|(x,y)\| \left| \sin\left(\frac{y^2}{x}\right) \right| \\
&\leq \|(x,y)\| \to 0,
\end{aligned}
$$

kun $(x,y) \to 0$.

Alueeseen $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$ rajoitettuna f on alkeisfunktio, joten osittaisderivaattojen olemassaolo voidaan palauttaa jo tunnettuihin differentioituvuustuloksiin. Oletetaan tunnetuksi seuraavien kuvauksien differentioituvuus:

$$
\begin{array}{cc}
(x,y) \mapsto \frac{y^2}{x} & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R}) \\
t \mapsto \sin(t) & t \in \mathbb{R} \\
(x,y) \mapsto \|(x,y)\| & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\
(x,y) \mapsto xy & (x,y) \in \mathbb{R}^2
\end{array}
$$

Alueessa $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$ f voidaan esittää yllä olevien kuvausten yhdisteenä, joten sen osittaisderivaatat ovat olemassa.

Huomataan, että f on vakio molemmilla koordinaattiakseleilla, sillä

$$f(x,0) = \sqrt{x^2 + 0^2} \sin\left(\frac{0^2}{x}\right) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ja $f \equiv 0$ y-akselilla.

Molemmat osittaisderivaatat ovat siis olemassa ja arvoltaan 0 origossa.

Osoitetaan vielä, että kaikkia alunperäisessä tehtävänannossa pyydettyjä osittaisderivaattoja ei ole olemassa. Tarkastellaan x-suuntaista erotusosamäärää pisteessä $(0, y) \neq 0 \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
\frac{f(h,y) - f(0,y)}{h} &= \frac{1}{h}\sqrt{h^2 + y^2} \sin\left(\frac{y^2}{h}\right) \\
&= \sqrt{1 + \frac{y^2}{h^2}} \sin\left(\frac{y^2}{|h|}\right)
\end{aligned}$$

Kyseisen osittaisderivaatan olemassaolo tarkoittaisi sitä, että yllä olevalla lausekkeella olisi raja-arvo, kun $h \to 0$. Tarkastellaan kyseista raja-arvoa seuraavaa jonoa pitkin: $h_n = \frac{y^2}{2\pi n + \pi/2}$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{1 + \frac{y^2}{h_n^2}} \sin\left(\frac{y^2}{|h_n|}\right) &= \sqrt{1 + \frac{y^2}{y^4}\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)^2} \sin\left(\frac{y^2}{y^2}\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= \sqrt{1 + \frac{\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)^2}{y^2}} \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \sqrt{1 + \frac{\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)^2}{y^2}} \\
&\geq \frac{\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)}{|y|} \to \infty,
\end{aligned}$$

kun $n \to \infty$.

Raja-arvoa, ja myöskään haluttua osittaisderivaattaa, ei siis ole olemassa.