VEKTORIANALYYSI I
2018, Laskuharjoitukset 4

1. Jos f ja g ovat reaaliarvoinen differentioituva kuvauksia avoimessa joukossa $E \subset \mathbb{R}^n$, niin osoita, että

$$\nabla (fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

ja

$$\nabla \left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{\nabla f}{f^2}$$

mikäli f ei ole nolla joukon E pisteissä.

2. Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x; y; z) = x^2 e^{xy+z}$. Laske funktion f gradientti. Määritä funktion gradientti pisteessä $P = (3, 0, -1)$. Etsi funktion f muutosnopeus (siis suunnattuderivaatta) pisteessä P vektorin $u = (2/3, 2/3, 1/2)$ suuntaan.

3. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ reaaliarvoinen differentioituva kuvaus. Jos $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ on differentioituva, niin osoita, että

$$\partial_u (f \circ g)(x) = f'(g(x))\, \partial_u g(x) = f'(x)\, (\nabla g(x) \cdot u)$$

kun u on yksikkövektori. Jos $f(x) = e^x$ ja $g(x) = \|x\|$, niin mikä on $\partial_u e^{\|x\|}$, kun $u = \frac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}}$.

4. Olkoon $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ lineaarikuvaus $Tx = x_1 - 2x_2 + x_3$. Mikä on lineaarikuvauksen T derivaatta ja mikä on sen matriisi.

5. Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x) = 3x_1x_2x_3 + 1$. Laske funktion f osittaisderivaatat ja gradientti. Osoita, että f on differentioituva.