HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus logiikkaan I, syksy 2018
Harjoitus 2 – Ratkaisuehdotukset

1. Olkoon totuusjakauma v sellainen että $v(p_i) = 1$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$ ja A propositiolause, jossa ei esiinny negaatiota. Näytä, että $v(A) = 1$.

   Ratkaisu: Käytetään induktiota propositiolauseen A rakenteen suhteen.

   - Alkuaskel. $A = p_i$ jollain $i \in \mathbb{N}$. Koska $v(p_i) = 1$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$, saadaan $v(A) = 1$.
   - Seuraavana vuorossa ovat induktioaskeleen kohdat. Ensin käsitellään konjunktio eli $A = (B \wedge C)$, Oletetaan, että propositiolauseessa A ei esiinny negaatiota. Tällöin A:n alikaavoissa B ja C ei esiinny negaatiota. Induktio-oletus: $v(B) = v(C) = 1$. Nyt konjuktion totuustaulusta seuraa, että $v(A) = 1$.
   - Tutkitaan tapaus $A = \neg B$. Nyt oletus, että kaavassa A ei esiinny negaatioita on epätosi, jolloin indukttioväiteen etuosa on epätotta, mistä seuraa että induktioväite on tosi .
   - Disjunktio, implikaatio ja ekvivalenssi käsitellään samalla tavalla kuin $\wedge$. Kyseisessä tilanteessa ne myös käyttäytyvät samalla lailla kuin konjuktio, eli ne säilyttävät totuuden.

2. Olkoon $K(A)$ propositiolauseessa A esiintyvien konnektiivien lukumäärä. Näytä, että jos lauseen A alikaavojen lukumäärä on enintään $2K(A)$, niin lauseessa A esiintyy negaatio.

   Ratkaisu: Edellisellä viikolla nousi esiin, että väite ei pidä paikkaansa. Todistetaan asia vastaesimerkillä:

   Lauseessa $A = (p_0 \wedge p_0)$ on kaksi alikaavaa: p_0 ja $p_0 \wedge p_0$ ja yksi konnektiivi, jolloin väitteen mukaan, A:ssa on negaatio, mikä ei pidä paikkaansa.

   Sen sijaan väite: Olkoon $K(A)$ propositiolauseessa A esiintyvien konnektiivien lukumäärä. Näytä, että jos lauseen A rakennepuun alkioiden lukumäärä on enintään $2K(A)$, niin lauseessa A esiintyy negaatio. pitää paikkaansa.

   Uusi väitte seuraa väitteestä “Näytä, että jos lauseessa A ei esiinny negaatiota, niin lauseen A rakennepuun alkioiden lukumäärä on $2K(A) + 1$", joka on helpompi todistaa. Todistetaan uusi väitteemme induktiolla lauseen A rakenteen suhteen.

- Alkuaskel. $A = p_i$ Lauseessa on 0 konnektiivia ja yksi rakennepuun alkio p_i. Tällöin rakennepuun alkioiden lukumäärä: $1 = 0 + 1 = 2K(A) + 1$ eli väite on tosi.
- Ol. $A = (B \vee C)$, missä $K(B)$ on B:n konnektiivien määrä ja $K(C)$ on C:n konnektiivien määrä. Tällöin A:n konnektiivien määrä $K(A) = K(B) + K(C) + 1$.

  Induktio-oletus: B:n rakennepuun alkioiden määrä on $2K(B)+1$ ja C:n rakennepuun alkioiden määrä on $2K(C) + 1$.

  Induktioväite: A:n rakennepuun alkioiden määrä on $2K(A) + 1$.

  Todistus: Lauseen A rakennepuun alkiot ovat A itse sekä kaikki B:n ja C: rakennepuiden alkiot. Tällöin A:n rakennepuun alkioiden määrä on B:n ja C:n rakennepuiden alkioiden summa plus yksi. [1] Koska B:lle ja C:lle pätee induktio-oletus, on A:n rakennepuun alkkioiden määrä:

  $$2K(B) + 1 + 2K(C) + 1 + 1 = 2(K(B) + K(C) + 1) + 1 = 2K(A) + 1$$

  mikä oli todistettava.
- Konjuktio, implikaatio ja ekvivalenssi käsitellään samalla tavalla kuin $\vee$. Lisäksi alkuoletuksemme mukaan A ei sisällä negaatiota, joten sitä ei tarvi käsitellä.

3. Oletetaan, että $v(p_0) = 0$ ja $v(p_1) = v(p_2) = 1$. Määritä

   (a) $v(\neg(((p_0 \vee p_2) \leftrightarrow \neg p_1) \rightarrow \neg p_2))$

   (b) $v(\neg((p_0 \vee \neg p_2) \leftrightarrow (\neg p_1 \wedge \neg p_2)))$.

Ratkaisu:

(a)

p_0	p_1	p_2	$\neg$	$(((p_0$	$\vee$	$p_2)$	$\leftrightarrow$	$\neg$	$p_1)$	$\rightarrow$	$\neg$	$p_2))$
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1

(b)

p_0	p_1	p_2	$\neg$	$((p_0$	$\vee$	$\neg$	$p_2)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	p_1	$\wedge$	$\neg$	$p_2))$
0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1

[1] Tässä kohdassa tuli alkuperäisen tehtävänannon kohdalla ongelma, koska A:ssa on alikaavoja B:n ja C:n alikaavojen summan lisättynä yhdellä verran vain, jos B:ssä ja C:ssä ei ole samoja alikaavoja.

4. Anna esimerkki totuusjakaumasta jolla lause

   (a) $((p_0 \to (p_1 \to \neg p_0)) \wedge p_0)$,

   (b) $((\neg p_0 \wedge p_1) \leftrightarrow (p_1 \to (p_0 \to \neg p_1)))$

   on tosi.

   Ratkaisu:

   (a) $v(p_0) = 1$, $v(p_1) = 0$

   Tehtävän voi ratkaista tekemällä totuustaulun tai esim. päättelemällä, että jotta konjunktio olisi tosi pitää olla $v(p_0) = 1$ ja tämän jälkeen katsoa, millä $v(p_1)$:n arvolla implikaatio on tosi.

   (b) $v(p_0) = 0$, $v(p_1) = 1$

   Tehtävän voi ratkaista tekemällä totuustaulun tai päättelemällä.

5. Onko lause

   (a) $p_0 \wedge (\neg p_0 \to (p_1 \wedge \neg p_1)))$,

   (b) $((p_0 \vee \neg p_1) \leftrightarrow (p_0 \leftrightarrow \neg(p_0 \vee p_1)))$

   tautologia, kontingenssi vai ristiriita?

   Ratkaisu:

   (a)

p_0	p_1	p_0	$\wedge$	$(\neg$	p_0	$\to$	$(p_1$	$\wedge$	$\neg$	$p_1)))$
1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1
0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0

   Huomataan, että totuusjakaumalla $v(p_0) = v(p_1) = 0$ pätee $v(p_0 \wedge (\neg p_0 \to (p_1 \wedge \neg p_1)))) = 0$ ja totuusjakaumalla $v(p_0) = v(p_1) = 1$ $v(p_0 \wedge (\neg p_0 \to (p_1 \wedge \neg p_1)))) = 1$, joten lause on kontigenssi.

(b)

p_0	p_1	$((p_0$	$\vee$	$\neg$	$p_1)$	$\leftrightarrow$	$(p_0$	$\leftrightarrow$	$\neg$	$(p_0$	$\vee$	$p_1)))$
1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0

Totuustaulukosta nähdään lauseen olevan ristiriita.

6. Oletetaan että A ja B ovat propositiolauseita. Ovatko seuraavat lauseet loogisesti ekvivalentteja?

   (a) $(A \leftrightarrow \neg B)$ ja $(\neg A \leftrightarrow B)$.

   (b) $(A \leftrightarrow B)$ ja $(A \leftrightarrow \neg B)$.

   (c) $(A \rightarrow B)$ ja $(A \vee \neg A)$

Ratkaisu:

(a)

A	B	$(A$	$\leftrightarrow$	$\neg$	$B)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	A	$\leftrightarrow$	$B)$
1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0

Totuustaulusta nähdään, että kyseessä on tautologia, joten lauseet ovat loogisesti ekvalentteja.

(b)

A	B	$(A$	$\leftrightarrow$	$B)$	$\leftrightarrow$	$(A$	$\leftrightarrow$	$\neg$	$B)$
1	1	1	1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	0	1	0	0	0	0	1	0

Totuustaulusta nähdään, että kyseessä on ristiriita, joten lauseet eivät voi olla loogisesti ekvalentit.

(c) Emme voi päätellä asiaa, koska jos esim. $A = B = p_0$

p_0	$(p_0$	$\rightarrow$	$p_0)$	$\leftrightarrow$	$(p_0$	$\vee$	$\neg$	$p_0)$
1	1	1	1	1	1	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1	0

niin saadaan tautologia, jolloin lauseet ovat loogisesti ekvalentit. Sen sijaan, jos esim. $A = p_0$ ja $B = p_1$ niin lauseet eivät ole loogisesti ekvalentit, koska totuusjakaumalla $v(p_0) = 1, v(p_1) = 0$

p_0	p_1	$(p_0$	$\rightarrow$	$p_1)$	$\leftrightarrow$	$(p_0$	$\vee$	$\neg$	$p_1)$
1	0	1	0	0	0	1	1	1	0

$v(p_0 \rightarrow p_1) = 0$ ja $v(p_0 \vee \neg p_1) = 1$, joten lauseet eivät ole loogisesti ekvalentit.

7. Oletetaan että A ja B ovat propositiolauseita ja $(A \rightarrow B) \Rightarrow (B \rightarrow A)$. Näytä, että $B \Rightarrow A$.

Ratkaisu: Tehdään vastaoletus, että A ei ole B:n looginen seuraus. Tällöin on olemasa totuusjakauma, jolla $v(A) = 0$, kun $v(B) = 1$. Tästä kuitenkin seuraa, että $v((A \rightarrow B)) = 1$, mutta $v((B \rightarrow A)) = 0$, jolloin $(B \rightarrow A)$ ei voi olla $(A \rightarrow B)$:n looginen seuraus, mikä on ristiriita. Täten on B on A:n looginen seuraus eli $B \Rightarrow A$.