HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus logiikkaan I, syksy 2018
Harjoitus 3 – Ratkaisuehdotukset

1. Olkoot A, B ja C propositiolauseita. Näytä, että

$$A \to (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (A \to C).$$

Ratkaisu: Yksi tapa nähdä, että kaavat $A \to (B \wedge C)$ ja $(A \to B) \wedge (A \to C)$ ovat loogisesti ekvivalentit, on tehdä totuustaulu lauseelle

$$(A \to (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \to B) \wedge (A \to C))$$

ja huomata, että lause on tautologia.

A	B	C	$((A$	$\to$	$(B$	$\wedge$	$C))$	$\leftrightarrow$	$((A$	$\to$	$B)$	$\wedge$	$(A$	$\to$	$C)))$
1	1	1	1	1	1	1	1	**1**	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0	0	**1**	1	1	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0	0	1	**1**	1	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0	**1**	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1	**1**	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	**1**	0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0	0	1	**1**	0	1	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	0	0	0	**1**	0	1	0	1	0	1	0

Totuustaulun perusteella ekvivalenssin totuusarvoksi saadaan aina 1, olivatpa lauseiden A, B ja C totuusarvot mitä tahansa. Täten lauseet $A \to (B \wedge C)$ ja $(A \to B) \wedge (A \to C)$ ovat loogisesti ekvivalentit.

2. Olkoot A, D ja E propositiolauseita, B propositiolause joka on saatu A:sta korvaamalla propositiosymboli p_0 propositiolauseella D jokaisessa esiintymässään ja vastaavasti C propositiolause joka on saatu A:sta korvaamalla propositiosymboli p_0 propositiolauseella E jokaisessa esiintymässään. Näytä, että jos $D \Leftrightarrow E$, niin $B \Leftrightarrow C$.

Ratkaisu: Notaation ymmärtämisen helpottamiseksi määritellään seuraavanlainen lyhennysmerkintä: jos X ja Y ovat propositiolauseita, olkoon $X[Y/p_i]$

se propositiolause, joka saadaan korvaamalla lauseesta X jokainen propositiosymbolin p_i esiintymä kaavalla Y. Esimerkiksi jos $X = ((p_0 \wedge p_1) \to p_0)$ ja $Y = (p_3 \vee p_2)$, niin tällöin

$$X[Y/p_0] = ((Y \wedge p_1) \to Y) = (((p_3 \vee p_2) \wedge p_1) \to (p_3 \vee p_2))$$

ja

$$X[Y/p_1] = ((p_0 \wedge Y) \to p_0) = ((p_0 \wedge (p_3 \vee p_2)) \to p_0).$$

Näillä merkinnöillä tehtävässä esiintyvät kaavat B ja C saadaan esitettyä muodossa $B = A[D/p_0]$ ja $C = A[E/p_0]$.

Oletetaan sitten, että D ja E ovat loogisesti ekvivalentit eli että ne saavat saman totuusarvon jokaisella totuusjakaumalla. Halutaan osoittaa, että myös kaavat $B = A[D/p_0]$ ja $C = A[E/p_0]$ ovat loogisesti ekvivalentteja. Tätä varten olkoon v totuusjakauma. Koska D ja E ovat ekvivalentit, pätee $v(D) = v(E)$. Todistamme induktiolla kaavan A rakenteen suhteen väitteen $v(A[D/p_0]) = v(A[E/p_0])$.

Alkuaskeleet:

(i) Jos $A = p_0$, niin tällöin $A[D/p_0] = p_0[D/p_0] = D$ ja $A[E/p_0] = p_0[E/p_0] = E$. Nyt oletuksemme perusteella $v(A[D/p_0]) = v(D) = v(E) = v(A[E/p_0])$.

(ii) Jos $A = p_i$ jollekin $i \in \mathbb{N}$, $i \neq 0$, niin kaavassa A ei esiinny propositiosymbolia p_0, jolloin $A[D/p_0] = A = A[E/p_0]$. Siten $v(A[D/p_0]) = v(A) = v(A[E/p_0])$.

Induktioaskeleet:

(iii) Oletetaan sitten, että $A = \neg F$ jollekin propositiolauseelle F. Huomataan, että $A[D/p_0] = (\neg F)[D/p_0] = \neg F[D/p_0]$. Vastaavasti $A[E/p_0] = \neg F[E/p_0]$.

Koska todistettava väite on $v(A[D/p_0]) = v(A[E/p_0])$, induktio-oletus on muotoa $v(F[D/p_0]) = v(F[E/p_0])$. Nyt negaation totuusmääritelmän nojalla $v(A[D/p_0]) = 1 - v(F[D/p_0]) = 1 - v(F[E/p_0]) = v(A[E/p_0])$.

(iv) Oletetaan sitten, että $A = (F \wedge G)$ joillekin propositiolauseille F ja G. Nyt $A[D/p_0] = (F \wedge G)[D/p_0] = (F[D/p_0] \wedge G[D/p_0])$ ja samoin $A[E/p_0] = (F[E/p_0] \wedge G[E/p_0])$.

Tehdään jälleen induktio-oletus, että $v(F[D/p_0]) = v(F[E/p_0])$ sekä $v(G[D/p_0]) = v(G[D/p_0])$. Nyt konjunktion totuusmääritelmän nojalla $v(A[D/p_0]) = v(F[D/p_0])v(G[D/p_0]) = v(F[E/p_0])v(G[E/p_0]) = v(A[E/p_0])$.

Konnektiivit $\vee$, $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$ käsitellään samoin kuin $\neg$ ja $\wedge$. Nyt olemme osoittaneet, että $v(B) = v(A[D/p_0]) = v(A[E/p_0]) = v(C)$. Koska v oli mielivaltainen totuusjakauma, kaavat B ja C ovat loogisesti ekvivalentit, mikä oli todistettava.

3. Etsi propositiolauseet A, D ja E, joilla $D \Rightarrow E$ mutta $B \not\Leftrightarrow C$, missä B ja C ovat kuten tehtävässä 2.

Ratkaisu: Valitaan $A = (p_0 \rightarrow (p_1 \wedge p_2))$, $D = (p_1 \wedge p_2)$ sekä $E = p_1$. Nyt $B = ((p_1 \wedge p_2) \rightarrow (p_1 \wedge p_2))$ ja $C = (p_1 \rightarrow (p_1 \wedge p_2))$. Koska lause E on välttämätön ehto lauseelle D, väite $D \Rightarrow E$ pätee. Kuitenkaan $B \not\Leftrightarrow C$, sillä B on tautologiana aina tosi, kun taas C on epätosi, mikäli p_1 on tosi mutta p_2 epätosi.

4. Mikä on totuusfunktio f_A kun

$$A = \neg(p_0 \leftrightarrow p_1) \leftrightarrow (\neg p_0 \leftrightarrow p_2)?$$

Ratkaisu: Koska suurin propositiosymbolin indeksi, joka lauseessa A esiintyy, on 2, on totuusfunktio f_A kuvaus $\{0,1\}^3 \rightarrow \{0,1\}$, joka kuvaa kolmikon (x, y, z) luvuksi $v(A)$, missä v on mikä tahansa totuusjakauma, jolle pätee $v(p_0) = x$, $v(p_1) = y$ ja $v(p_2) = z$. Alla on lauseen A totuustaulu.

p_0	p_1	p_2	$(\neg$	$(p_0$	$\leftrightarrow$	$p_1)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	p_0	$\leftrightarrow$	$p_2))$
1	1	1	0	1	1	1	**1**	0	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1	**0**	0	1	1	0
1	0	1	1	1	0	0	**0**	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	0	**1**	0	1	1	0
0	1	1	1	0	0	1	**1**	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1	**0**	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	**0**	1	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0	**1**	1	0	0	0

Totuustaulusta arvot kopioimalla saadaan taulukoitua funktion f_A kaikki mahdolliset arvot:

x	y	z	$f_A(x,y,z)$
1	1	1	**1**
1	1	0	**0**
1	0	1	**0**
1	0	0	**1**
0	1	1	**1**
0	1	0	**0**
0	0	1	**0**
0	0	0	**1**

5. Mitkä seuraavista lauseista ovat disjunktiivisessa ja mitkä konjunktiivisessa normaalimuodossa?

   (a) $p_0 \vee p_1 \vee p_2$.

   (b) $p_0 \wedge p_1 \wedge p_2$.

   (c) $\neg(p_0 \wedge \neg p_1) \vee p_2$.

   (d) $(\neg p_0 \wedge \neg p_1) \vee p_2)$.

   (e) $\neg p_0 \wedge (\neg p_1 \vee p_2)$.

   Ratkaisu:

   Kohtien (a) ja (b) lauseet ovat kumpikin sekä disjunktiivisessa että konjunktiivisessa normaalimuodossa: kohdassa (a) voidaan ajatella olevan disjunktio, jossa disjunkteina on yhden propositiosymbolin mittaisia konjunktioita; toisaalta voidaan ajatella, että lause on yhden konjunktin mittainen konjunktio, ja tämä konjunkti on kolmen propositiosymbolin disjunktio. Kohdassa (b) käy juuri päinvastoin: kyseessä on sekä yhden disjunktin mittainen disjunktio, jossa disjunkti on konjunktio propositiosymboleista, että kolmen mittainen konjunktio, jossa konjunktit ovat yhden propositiosymbolin mittaisia disjunktioita.

   Kohdan (c) lause ei ole disjunktiivisessa eikä konjunktiivisessa normaalimuodossa, sillä negaatiota ei esiinny pelkästään propositiosymbolin edessä.

   Kohdassa (d) lause on disjunktiivisessa normaalimuodossa, sillä pääkonnektiivi on disjunktio, joka yhdistää kahta konjunktiota (toinen kahden, toinen yhden literaalin mittainen).

   Kohdassa (e) kyseessä on konjunktiivinen normaalimuoto, sillä pääkonnektiivi on konjunktio, joka yhdistää kahta disjunktiota (toinen yhden ja toinen kahden literaalin mittainen).

6. Etsi disjunktiivisessa normaalimuodossa oleva lause joka on loogisesti ekvivalentti lauseen

$$((p_0 \vee p_1) \leftrightarrow (p_0 \wedge p_2)) \leftrightarrow (p_1 \leftrightarrow p_2)$$

kanssa.

Ratkaisu: Disjunktiivisen normaalimuodon lauseelle voi muodostaa tutkimalla lauseen totuustaulun rivejä, joilla lause on tosi, muodostamalla rivin totuusjakaumaa vastaavat konjunktiot ja ottamalla disjunktio näistä.

p_0	p_1	p_2	$(((p_0$	$\vee$	$p_1)$	$\leftrightarrow$	$(p_0$	$\wedge$	$p_2))$	$\leftrightarrow$	$(p_1$	$\leftrightarrow$	$p_2))$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**1**	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	**1**	1	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	**1**	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	**1**	0	1	0

Tällä tavalla saadaan lause

$$(p_0 \wedge p_1 \wedge p_2) \vee (p_0 \wedge p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_0 \wedge p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2).$$

7. Etsi konjunktiivisessa normaalimuodossa oleva lause joka on loogisesti ekvivalentti lauseen

$$\neg(p_0 \leftrightarrow p_1) \leftrightarrow (\neg p_1 \leftrightarrow p_2)$$

kanssa.

Ratkaisu: Konjunktiivisen normaalimuodon lauseelle voi muodostaa tutkimalla lauseen totuustaulun rivejä, joilla lause on epätosi, muodostamalla rivin totuusjakaumaa vastaavat disjunktiot ja ottamalla konjunktio näistä.

p_0	p_1	p_2	$(\neg$	$(p_0$	$\leftrightarrow$	$p_1)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	p_1	$\leftrightarrow$	$p_2))$
1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1	**0**	0	1	1	0
1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	**0**	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	**0**	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	0	**0**	1	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0

Tällä tavalla saadaan lause

$$(\neg p_0 \lor \neg p_1 \lor p_2) \land (\neg p_0 \lor p_1 \lor p_2) \land (p_0 \lor \neg p_1 \lor \neg p_2) \land (p_0 \lor p_1 \lor \neg p_2).$$