Vektorianalyysi I

HARJOITUS 3

Tehtävä 1. Oletetaan, että funktiolla $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on kaksi jatkuvaa derivaattaa. Laske seuraavien funktioiden ensimmäiset ja toisen kertaluvun osittaisderivaatat

(a) $h(u, v) = g(uv^2 + 1)$;

(b) $h(u, v) = g(u - v)$.

Ratkaisuehdotus

Funktioiden ensimmäiset ja toisen kertaluvun osittaisderivaatat saadaan laskemalla ketjusäännön avulla, eli 'Ulkofunktion derivaatta kertaa sisäfunktion derivaatta':

$$D[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x).$$

Nyt laskemalla saadaan:

(a)

$h_u(u, v) = \partial_u h(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} h(u, v) = g'(uv^2 + 1)v^2$;

$h_v(u, v) = \partial_v h(u, v) = \frac{\partial}{\partial v} h(u, v) = g'(uv^2 + 1)2uv$;

$h_{uu}(u, v) = \partial_{uu} h(u, v) = \frac{\partial^2}{\partial u^2} h(u, v) = g''(uv^2 + 1)v^4$;

$h_{vv}(u, v) = \partial_v h(u, v) = \frac{\partial^2}{\partial v^2} h(u, v) = g''(uv^2 + 1)4u^2v^2 + g'(uv^2 + 1)2u$;

$h_{uv}(u, v) = \partial_{uv} h(u, v) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} h(u, v) = g''(uv^2+1)v^2 \cdot 2uv + g'(uv^2+1)2v$

$= g''(uv^2 + 1)2uv^3 + g'(uv^2 + 1)2v$;

$h_{vu}(u, v) = \partial_{vu} h(u, v) = \frac{\partial^2}{\partial v \partial u} h(u, v) = g''(uv^2+1)2uv \cdot v^2 + g'(uv^2+1)2v$

$= g''(uv^2 + 1)2uv^3 + g'(uv^2 + 1)2v$.

Tehtävä 2. Laske funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f(x) = ||x||^\alpha$$

osittaisderivaatat origon ulkopuolella, kun $\alpha \in \mathbb{R}$. Millä vakion α arvoilla osittaisderivaatat ovat olemassa myös origossa?

Ratkaisuehdotus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ja $||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 ... + x_n^2}$.

Havaitaan että:

$D||x|| = D(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 ... + x_n^2}) =$

$D((x_1^2 + x_2^2 ... + x_n^2)^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} \cdot 2x_i(x_1^2 + x_2^2 ... + x_n^2)^{\frac{1}{2}-1}$

$= x_i(x_1^2 + x_2^2 ... + x_n^2)^{-\frac{1}{2}} = ||x||^{-1}$.

Osittaisderivaatta yhdistetylle funktiolle on muotoa:

$$\partial_i f(x) = \alpha ||x||^{\alpha-1} \cdot D||x|| = \alpha ||x||^{\alpha-1} |x||^{-1} = \alpha ||x||^{\alpha-2}$$

kun $x \neq 0$ ja $i \leq n$.

Siis osittaisderivaatta on olemassa origossa kun $\alpha - 2 \geq 0$, eli kun $\alpha \geq 2$ jos sovitaan että $0^0 = 1$ ja $\alpha > 2$ jos $0^0 \neq 1$.

Tehtävä 3. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y, z) = 2 - x^2 + 3y^2$$

Määritä funktion f graafin tangenttitason yhtälö pisteessä (2, 1). Selitä, miksi se on tangenttitaso. Havainnollista kuvalla.

Ratkaisuehdotus:

Jos funktiolla f on jatkuvat osittaisderivaatat, niin pinnan S tangenttitaso pisteesä $(2, 1)$ saadaan kaavasta:

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

missä

$$\begin{cases} a = f_x(x_0, y_0) = -2x_0 \\ b = f_y(x_0, y_0) = 6y_0 \\ z_0 = f(x_0, y_0) \end{cases} .$$

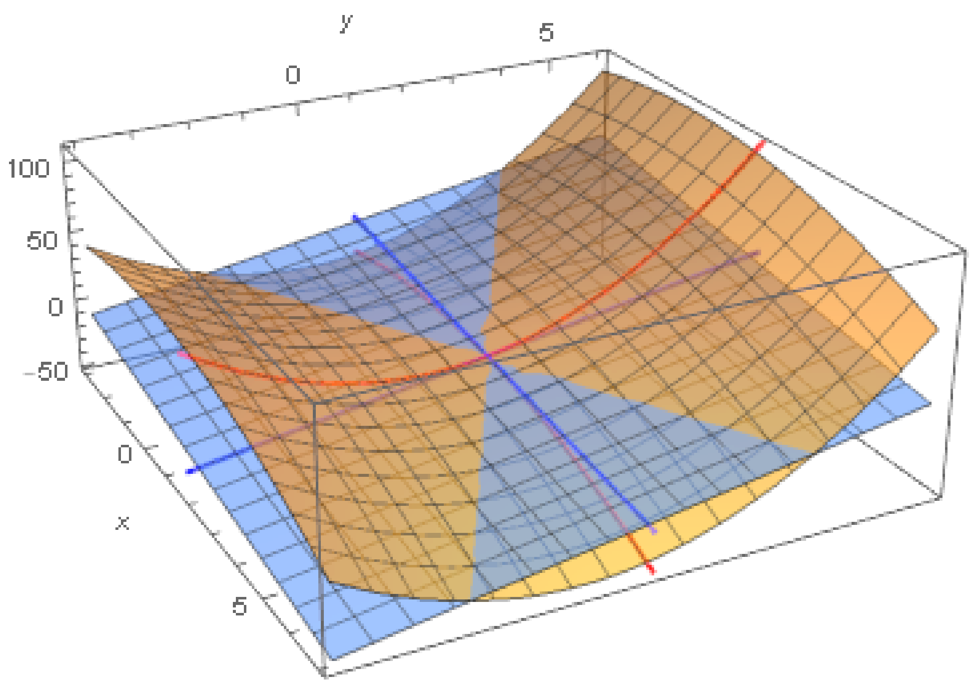
Sijoittamalla saadaan:

$$\begin{cases} a = f_x(2,1) = -4 \\ b = f_y(2,1) = 6 \\ z_0 = f(2,1) = 1 \end{cases}.$$

Siis yhtälö on moutoa:

$$z - 1 = -4(x-2) + 6(y-1)$$
$$z = -4x + 6y + 3.$$

Tangenttitason piste (2,1) toteuttaa yllä olevan yhtälön.



Kuva 1: Caption

Tehtävä 4. Olkoon $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineaarikuvaus ja $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kuvaus

$$A(x) = Tx + c$$

missä c on reaalinen vakio. Osoita, että kuvauksen A sunnattu derivaatta yksikkövektorin $e \in \mathbb{R}^n$ suuntaan on $\partial_e A(x) = Te$.

Ratkaisuehdotus Määritelmän nojalla

$$\partial_e A(x) = \lim_{t \to 0} \frac{A(x + te) - A(x)}{t}$$

missä $t \neq 0$ ja T on lineaarikuvaus eli $T(x) = Tx$.

Tällöin saadaan:

$$\begin{aligned}
\partial_e A(x) &= \lim_{t \to 0} \frac{A(x + te) - A(x)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{T(x + te) + c - Tx - c}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{T(x) + Tte + c - Tx - c}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{Tx + Tte + Tx}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{Tte}{t} = Te.
\end{aligned}$$

Siis $\partial_e A(x) = Te$.

Tehtävä 5. Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y, z) = x^2 + xy^2z^2 + z.$$

Laske funktion gradienttivektori pisteessä (x, y, z).

Ratkaisuehdotus

Funktion gradientti pisteessä (x, y, z) on:

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y^2z^2 \\ 2xyz^2 \\ 2xy^2z + 1 \end{bmatrix}.$$