ja lisäksi oletetaan, että integraali $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ hajaantuu. Tällöin minoranttiperiaatteen nojalla myös integraali $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ hajaantuu[5]. Eli intuitiivisesti ajateltuna funktion f ja x-akselin välinen pinta-ala on ääretön, koska tämä ala on "suurempi" kuin funktion g ja x-akselin välinen pinta-ala, joka on ääretön.

Minoranttiperiaatetta käytetään seuraavasti:

1. Halutaan todistaa, että jokin integraali $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ hajaantuu.
2. Etsitään funktio g, joka on pienempi kuin f eli $g(x) \leq f(x)$ ja jonka integraali $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ hajaantuu.
3. Tällöin integraali $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ hajaantuu.

Esimerkki 14.3. Osoita minoranttiperiaatteen avulla, että integraali

$$\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}-1}\mathrm{d}x$$

hajaantuu.

Ratkaisu. Nyt $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$. Pitäisi löytää tätä funktiota pienempi funktio g, jonka integraali hajaantuu välillä $[2, \infty]$. Helppo tapa löytää pienempi funktio on kasvattaa osoittajaa yhdellä:

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} > \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Eli nyt etsimämme funktio on $g(x) = 1/\sqrt{x}$. Tämän integraali voidaan laskea jälleen suoraviivaisesti:

$$\begin{aligned}\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x &= \lim_{M\to\infty}\int_2^M \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{M\to\infty} \Big|_2^M 2\sqrt{x} \\ &= \lim_{M\to\infty}(2\sqrt{M} - 2\sqrt{2}) \\ &= \infty.\end{aligned}$$

[5]Tämä periaate seuraa itse asiassa suoraan majoranttiperiaatteesta: jos f suppenisi, niin silloin majoranttiperiaatetta voisi soveltaa ja myös g suppenisi.

Täten koska

$$\infty = \frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}-1},$$

niin integraali $\frac{1}{\sqrt{x}-1}$ hajaantuu.

15 Tiheysfunktiot

Kuten jo useaan kertaan on todettu, integraalilla voi laskea aloja ja tilavuuksia. Yksi määrätyn integraalin tärkeimpiä sovelluksia on lisäksi se, että sillä voi laskea tapahtumien todennäköisyyksiä. Tämän sovelluksen käyttäminen vaatii kuitenkin **tiheysfunktion** käsitettä.

Tiheysfunktio on matemaattisesti ajateltuna mikä tahansa ei-negatiivisia arvoja saava funktio, joka integroituu reaaliakselilla lukuun yksi eli jolle pätee

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1 \text{ ja}$$
$$f(x) \geq 0.$$

Graafisesti tulkittuna tiheysfunktio on siis funktio, joka on jatkuvasti x-akselin yläpuolella (tai x-akselilla) ja jonka alla olevan alueen pinta-ala on yksi.

Tiheysfunktion idea on seuraava: jos satunnaismuuttujalla X on tiheysfunktio $f(x)$, niin tätä tiheysfunktiota integroimalla voi laskea todennäköisyyksiä. Jos merkitään $P(a \leq X \leq b)$ todennäköisyyttä, että satunnaismuuttuja X saa arvon välillä $[a, b]$, niin tämän todennäköisyyden voi laskea integroimalla satunnaismuuttujan tiheysfunktion $f(x)$ tällä välillä:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Alla olevissa esimerkeissä käytetään lisäksi seuraavaa "integrointisääntöä": jos funktio $f(x)$ on jollakin välillä $[i, j]$ nolla eli pätee $f(x) = 0,\ x \in [i, j]$, niin myös tämän funktion integraali välillä $[i, j]$ on nolla eli

$$\int_i^j f(x) = 0.$$

Tarkastellaan nyt funktiota $f(x)$, joka on määritelty paloittain:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, \text{ kun } x \in [a, b] \\ 0 \text{ muulloin.} \end{cases}$$

Eli funktio f saa positiivisen arvon e^x joukossa $[a, b]$ ja on nolla muualla. Kun tätä funktiota nyt integroi välillä $[-\infty, \infty]$, niin se alue jossa funktio on nolla voidaan sivuttaa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b e^x dx.$$

Eli koska funktion integraali on nolla sillä alueella jossa funktio on nolla, niin integroitaessa tämä nolla-alue voidaan poistaa eli integroinnit rajat voidaan muuttaa siten, että nolla-alue poistuu.

Tarkastellaan nyt esimerkkien avulla tiheysfunktioita ja niiden integrointia.

Esimerkki 15.1. Satunnaismuuttuja X on **tasajakautunut**, jos todennäköisyys että X saa arvon tietyssä joukossa riippuu ainoastaan tämän joukon koosta (eikä tämän joukon sijainnista x-akselilla). Jos X on esimerkiksi tasajakautunut välillä $[0, 2]$, sen tiheysfunktio on

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{jos } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tämä on tiheysfunktio, koska se on aina ei-negatiivinen ja sen integraali reaaliakselilla on yksi:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^2 \frac{1}{2}\mathrm{d}x \\ &= \Big|_0^2 \frac{1}{2}x \\ &= 1. \end{aligned}$$

Nyt tätä tiheysfunktiota integroimalla voi siis laskea todennäköisyyksiä. Lasketaan todennäköisyys, että X saa arvon välillä $[0, 1/6]$:

$$\begin{aligned} P(0 \leq X \leq 1/6) &= \int_0^{1/6} \frac{1}{2}\mathrm{d}x \\ &= \Big|_0^{1/6} \frac{1}{2}x = 1/12. \end{aligned}$$

Esimerkki 15.2. Toinen esimerkki satunnaismuuttujan tiheysfunktiosta on

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{jos } x \geq 0 \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tämä on tiheysfunktio, koska se on aina ei-negatiivinen ja se integroituu yhteen:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{0}^{\infty} e^{-x}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{M\to\infty}\int_{0}^{M} e^{-x}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{M\to\infty}\Big|_{0}^{M} - e^{-x} \\
&= \lim_{M\to\infty}(-e^{-M} - (-e^{-0})) \\
&= -0 - (-1) = 1.
\end{aligned}$$

Tämä on erään **eksponenttijakauman** tiheysfunktio. Integroimalla tiheysfunktiota voidaan jälleen laskea välien todennäköisyyksiä:

$$\begin{aligned}
P(a \leq X \leq b) &= \int_{a}^{b} e^{-x}\mathrm{d}x \\
&= (-e^{-a} - (-e^{-b}) \\
&= e^{-b} - e^{-a},
\end{aligned}$$

jossa oletetaan, että $a > 0$.

Tarkastellaan nyt paloittain määriteltyä funktiota

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & \text{jos } 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tässä a on jokin vakio. Kysymys kuuluu: millä a:n arvolla tämä funktio on tiheysfunktio? Koska tiheysfunktiolta vaaditaan ensinnäkin ei-negatiiviisuus, niin on pakko olla, että $a \geq 0$, sillä muuten yllä oleva tiheysfunktio saisi negatiivia arvoja.

Toisaalta tiheysfunktiolta vaaditaan, että se integroituu yhteen reaaliakselilla eli

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Integroidaan nyt funktio $f(x) = ax^2$ ja katsotaan millä a:n arvolla se integroituu lukuun yksi:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty} ax^2 dx \\ &= \int_{0}^{10} ax^2 dx \\ &= \Big|_0^{10} \frac{a}{3}x^3. \\ &= \frac{a}{3}1000.\end{aligned}$$

Nyt tämä funktio on siis tiheysfunktio, kun tämä integraali saa arvon yksi eli pätee

$$\frac{a}{3}1000 = 1,$$

eli $a = 3/1000$. Täten funktio

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{100}x^2, & \text{jos } 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$$

on tiheysfunktio.

16 Tasointegraalit

Ennen tasointegraaleihin siirtymistä käsitellään hieman integroinnin notaatiota. Tarkastellaan jälleen tavallista yksiulotteista integraalia

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Tässä siis integrointi tapahtuu välillä $x \in [a, b]$. Tätä väliä $[a, b]$ voidaan kuitenkin merkitä $[a, b] = A$, jolloin yllä oleva integraali voidaan merkitä vastaavasti:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_A f(x)\mathrm{d}x.$$

Integraali $\int_A f(x)\mathrm{d}x$ ilmaisee, että funktio $f(x)$ integroidaan joukossa A. Tässä tapauksessa koska $A = [a, b]$, niin tämä on sama asia kuin integraali $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Tälle uudelle lyhyemmälle notaatiolle tulee käyttöä, kun tarkastelemme **useamman muuttujan funktion** integroimista. Tarkastellaan kahden muuttujan funktiota

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \to f(x, y).$$

Tämän muuttujan lähtöjoukko on nyt **taso** eli $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Sen maalijoukko on puolestaan reaaliluvut eli $\mathbb{R}$. Yksi esimerkki tällaisesta kahden muuttujan funktiosta on

$$f(x, y) = x + y,$$

jolle pätee siis esimerkiksi että $f(1, 2) = 3$. Nyt tällaista funktiota $f(x, y)$ voi integroida tasossa eli kahden muuttujan x ja y suhteen. Syntynyt integraali on nimeltään **tasointegraali**.

Seuraavaksi tasointegraali pitäisi määritellä. Palautetaan aluksi mieliin, että yhden muuttujan tapauksessa määrätty integraali $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ määriteltiin ala- ja yläsummien avulla. Esimerkiksi alasumma saatiin laskettua jakamalla ensin integrointiväli $[a, b]$ osiin ja laskemalla funktion f pienin arvo jokaisessa näistä osissa. Esimerkissämme väli $[a, b]$ jaettiin kolmen osaan, joiden jokaisen pituus oli $1/3$. Laskimme seuraavaksi funktion f pienimmän arvon jokaisessa näistä osissa: merkitsimme näitä m_1, m_2 ja m_3. Alasumma saatiin tämän jälkeen summana

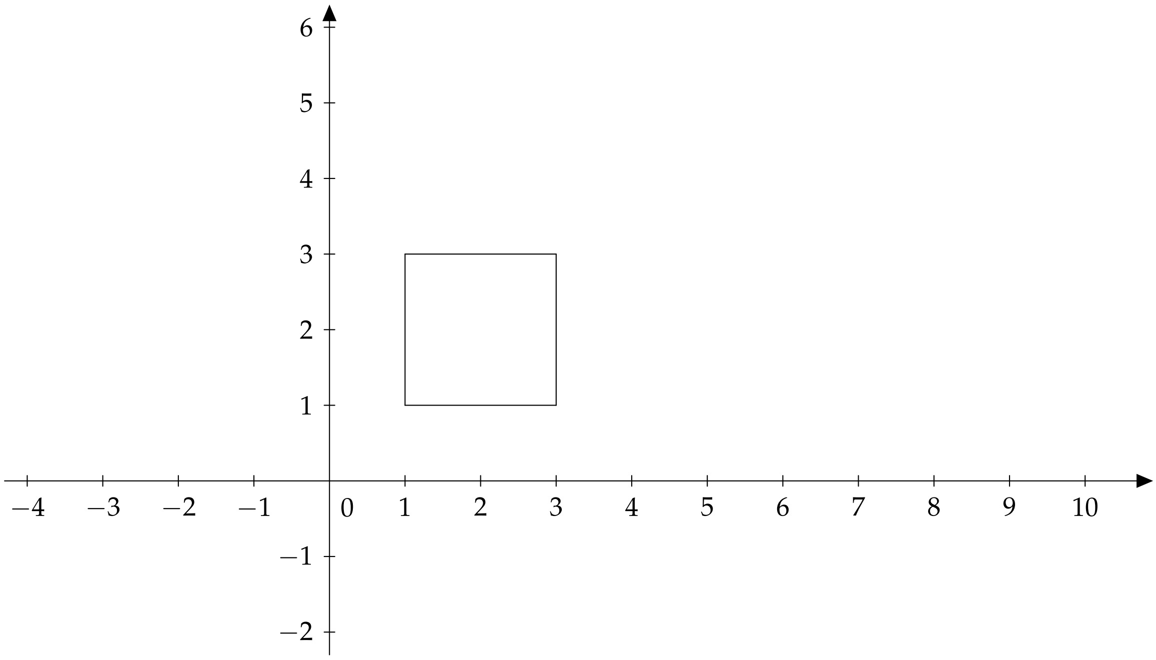
$$\frac{1}{3}m_1 + \frac{1}{3}m_2 + \frac{1}{3}m_3,$$

jossa siis jokaisen välin pituus kerrottiin funktion pienemmällä arvolla kyseisellä välillä.

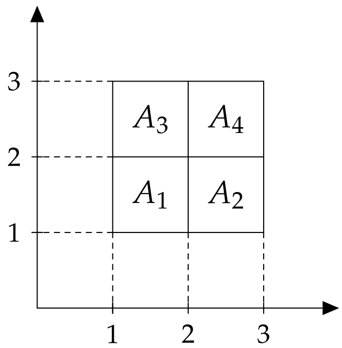
Kuten yhden muuttujan tapauksessa, määrätty integraali tasossa määritellään ylä- ja alasummien avulla. Nyt emme kuitenkaan voi enää pelkästään osittaa väliä, koska tasointegraali on nimensä mukaisesti määritelty tasossa eikä välillä. Valitaan integroitavaksi funktioksi $f(x, y) = x + y$. Tutkitaan kuitenkin helppoa esimerkkiä, jossa integrointi tapahtuu joukossa

$$[1, 3] \times [1, 3],$$

eli joukossa jossa $x \in [1, 3]$ ja $y \in [1, 3]$. Tämä joukko on sikäli helppo, että se määritellään kahden välin karteesisena tulona. Kyseinen joukko on siis yksinkertainen suorakulmio, joka näyttää kuvana seuraavalta:



Tasointegraalin ylä- ja alasummia laskettaessa tämä suorakulmio jaetaan osiin. Muodostetaan alla olevassa kuvassa näkyvä mahdollisimman yksinkertainen jako eli jaetaan väli $[1, 3]$ kahtia keskeltä:



Tästä näkyy, että suorakulmio $[1, 3] \times [1, 3]$ jaettiin nyt neljään osaan: osiin A_1, A_2, A_3 ja A_4. **Alasumma** määritellään valitsemalla funktion f pienin arvo jokaisessa näistä osista ja kertomalla se näiden osien pinta-alalla.

Olkoon siis $m(A_i)$ funktion f pienin arvo joukossa A_i, jossa luonnollisesti i on $1, 2, 3$ tai 4. Koska jokaisen näiden joukon pinta-ala on 1, niin alasumma on tässä tapauksessa

$$m(A_1) + m(A_2) + m(A_3) + m(A_4).$$

Nyt integroitavana on funktio $f(x,y) = x + y$. Kuvaa katsomalla huomataan, että tämän pienin arvo joukossa A_1 on yhtä kuin $1 + 1 = 2$. Vastaavasti tämän funktion pienin arvo joukossa A_2 on $2 + 1 = 3$, joukossa A_3 tämä pienin arvo on samoin $2 + 1 = 3$ ja joukossa A_4 tämä pienin arvo on $2 + 2 = 4$. Täten alasumma saa arvon

$$\begin{aligned} m(A_1) + m(A_2) + m(A_3) + m(A_4) &= 2 + 2 + 3 + 4 \\ &= 11. \end{aligned}$$

Vastaavasti **yläsumma** saadaan valitsemalla jokaisesta joukosta A_i funktion suurin arvo tässä joukossa. Merkitään tätä suurinta arvoa joukossa $M(A_i)$, jolloin yläsumma saadaan jälleen helposti katsomalla yllä olevaa kuvaa:

$$\begin{aligned} M(A_1) + M(A_2) + M(A_3) + M(A_4) &= 4 + 5 + 5 + 6 \\ &= 20. \end{aligned}$$

Näin karkealla osituksella ylä- ja alasummat siis eroavat toisistaan melko paljon. Nämä summat antavat siis ylä- ja alarajan tasointegraalille, jota merkitään kahdella integroimismerkillä

$$\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_A (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

jossa joukko A on suorakulmio $[1,3] \times [1,3]$.

Esimerkki 16.1. Lasketaan vielä ylä- ja alasummien antamat arviot tasointegraalille

$$\iint_A (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

jossa $A = [0,1] \times [0,2]$. Tehdään nyt jako, jossa x-arvojen väli $[0,1]$ jaetaan väleihin $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ ja $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ja y-arvojen väli $[0,2]$ jaetaan neljään väliin: $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $\left[1, \frac{1}{2}\right]$ ja $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$. Nyt tällä jaolla suorakulmio $A = [0,1] \times [0,2]$ saadaan jaettua kahdeksaan osaan (piirrä kuva, tästä ei ota muuten selvää):

$$\begin{aligned} A_1 &= \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right] & A_5 &= \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[1, \frac{3}{2}\right] \\ A_2 &= \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right] & A_6 &= \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \left[1, \frac{3}{2}\right] \\ A_3 &= \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right] & A_7 &= \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[\frac{3}{2}, 2\right] \\ A_4 &= \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right] & A_8 &= \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \left[\frac{3}{2}, 2\right] \end{aligned}$$

Näiden jokaisen osan ala on $1/4$. Koska integroitava funktio on $f(x,y) = x - y$, niin kyseisen funktion pienin arvo jokaisessa näistä joukosta löytyy valitsemalla mahdollisimman pieni x-arvo ja mahdollisimman suuri y-arvo. Täten alasummaksi saadaan

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left(m(A_1)+m(A_2)+m(A_3)+m(A_4)+m(A_5)+m(A_6)+m(A_7)+m(A_8)\right)\\
=&\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}+0-1-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}-1-2-\frac{3}{2}\right)\\
=&-\frac{9}{4}.
\end{aligned}$$

Vastaavasti yläsumma saadaan järkeiltyä siten, että valitaan osituksen jokaisessa joukossa mahdollisimman suuri x-arvo ja mahdollisimman pieni y-arvo. Täten tämä yläsumma on

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left(M(A_1)+M(A_2)+M(A_3)+M(A_4)+M(A_5)+M(A_6)+MA_7)+M(A_8)\right)\\
=&\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+1+0+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+0-1-\frac{1}{2}\right)\\
=&0.
\end{aligned}$$

Jälleen siis ylä- ja alaintegraali tuottavat huomattavan erilaisia tuloksia. Todellisuudessa kyseinen integraali on -1.

17 Tasointegraalin laskeminen

Aiemmin tutkimme ylä- ja alasummien antamia arvioita tasointegraalille

$$\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Tässä siis funktio $f(x,y)$ integroidaan muuttujien x ja y suhteen jossain tason $\mathbb{R}^2$ osajoukossa A. Aikaisemmissa esimerkeissä tämä integrointijoukko on ollut suorakulmio eli

$$A = [a,b] \times [c,d].$$

Ala- ja yläsummien laskemisessa ideana oli osittaa tämä suorakulmio A osiin ja laskea tämän avulla arvio tälle tasointegraalille. Kun tätä ositusta hienonnetaan, niin tämä arvio paranee ja on lähempänä integraalin todellista arvoa. Jos tasointegraali $\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ on olemassa, niin se voidaan määritellä näiden ylä- ja alasummien raja-arvona.

Tasointegraalin $\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ geometrinen intuitio on, että se antaa funktion $f(x,y)$ ja xy-tason välissä olevan alueen tilavuuden, kun x ja y rajoitetaan joukkoon A.

Esimerkki 17.1. Jos integroinnin alue A on suorakulmio $[0,1]\times[0,2]$ ja integroitavana on vakiofunktio $f(x,y)=10$, niin integraali $\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ antaa funktion $f(x,y)$ ja xy-tason suorakulmion $[0,1]\times[0,2]$ välissä olevan alueen tilavuuden, joka selvästi on $10\cdot 2=20$.

Toinen intuitiivinen tulkinta tasointegraalille on, että se antaa funktion f keskiarvon joukossa A kerrottuna tämän joukon pinta-alalla. Eli

$$\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (\text{Funktion } f \text{ keskiarvo joukossa } A)\cdot(\text{joukon } A \text{ pinta-ala}).$$

Tästä seuraa suoraan, että funktion f keskiarvo joukossa A saadaan jakamalla integraali $\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ joukon A alalla:

$$\text{Funktion } f \text{ keskiarvo joukossa } A = \frac{\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\text{Joukon } A \text{ pinta-ala}}$$

Esimerkiksi yllä olevassa esimerkissä joukon $A=[0,1]\times[0,2]$ pinta-ala oli 2, joten funktion keskiarvo tässä joukossa oli $20/2=10$.

Nyt kun tasointegraalille on esitetty intuitiivinen tulkinta, käsittelemme kuinka tämä tasointegraali käytännössä lasketaan. Tämä on yllättävän helppoa, kun integrointialue A on suorakulmio $[a,b]\times[c,d]$. Tällöin funktion $f(x,y)$ integrointi joukossa A voidaan laskea integroimalla tämä funktion ensin x:n suhteen ja integroimalla tämän jälkeen syntynyt lauseke y:n suhteen. Merkitään integraalia seuraavasti:

$$\iint_A xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Nyt tämä integrointi sujuu laskemalla aluksi ”sisäintegraali”, jota merkitään alla sulkujen sisässä olevana lausekkeena:

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

Eli lasketaan aluksi sisäintegraali $\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$. Tämän jälkeen integroidaan syntynyt lauseke y:n suhteen, kuten alla oleva esimerkki valaisee:

Esimerkki 17.2. Laske tasointegraali $\iint_A xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kun A on suorakulmio $[0,2] \times [5,6]$.

Ratkaisu. Nyt tehtävän suorakulmiolla on rajat $0 \leq x \leq 2$ ja $5 \leq y \leq 6$. Täten tämä tasointegraali voidaan kirjoittaa muodossa

$$\iint_A xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_5^6 \int_0^2 xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Tämä on helppo laskea: integroidaan ensin x:n suhteen ja tämän jälkeen integroidaan syntynyt lauseke y:n suhteen:

$$\begin{aligned}
\int_5^6 \int_0^2 xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_5^6 \left(\int_0^2 xydx \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_5^6 \left(\Big|_0^2 \frac{x^2}{2} y \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_5^6 (2y)\,\mathrm{d}y \\
&= \Big|_5^6 y^2 \\
&= 6^2 - 5^2 \\
&= 36 - 25 = 11.
\end{aligned}$$

Voit integroida tämän tasointegraalin myös toisessa järjestyksessä eli laskea integraalin

$$\int_0^2 \left(\int_5^6 xy\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Tästä saatava tulos on sama.

Kun integrointialue on suorakulmio, lasketaan tasointegraali integroimalla funktio $f(x,y)$ ensin joko x:n tai y:n suhteen ja tämän jälkeen jäljellä olevan muuttujan suhteen.

Esimerkki 17.3. Laske tasointegraali $\iint_A y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ integroimalla ensiksi y:n suhteen, kun A on suorakulmio $[0,1] \times [3,4]$.

Nyt tätä tasointegraalia voidaan jälleen merkitä seuraavasti:

$$\iint_A y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_3^4 \int_0^1 y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Integroinnin järjestystä voi nyt vaihtaa vapaasti:

$$\begin{aligned}
\int_3^4 \left(\int_0^1 y^3 \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_3^4 y^3 \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\Big|_3^4 \frac{y^4}{4} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\frac{4^4}{4} - \frac{3^4}{4} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(54 - \frac{27}{4} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\frac{189}{4} \right) \mathrm{d}x \\
&= \Big|_0^1 \frac{189}{4} x \\
&= \frac{189}{4}.
\end{aligned}$$

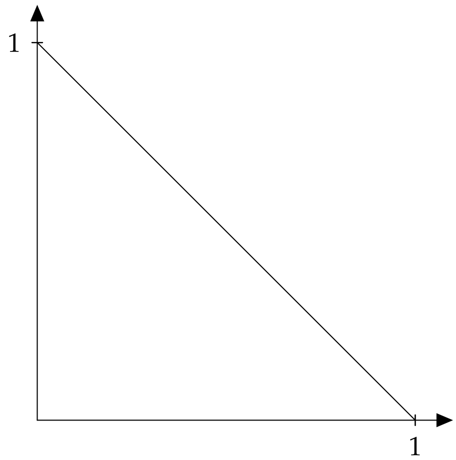
Yllä olevissa esimerkeissä integrointi sujui yhtä helposti kummassakin järjestyksessä: integrointi ensin x:n suhteen ja sen jälkeen y:n suhteen oli yhtä helppoa kuin integrointi ensin y:n suhteen ja tämän jälkeen x:n suhteen. Käytännössä näin ei kuitenkaan aina ole, joten jos integrointi ei tunnu sujuvan tietyssä järjestyksessä, kannattaa yrittää vaihtaa integrointijärjestystä.

Yllä olevista esimerkeistä nähtiin, että tasointegraalin laskeminen on yleensä helppoa, jos integrointialue A on suorakulmio. Ikävä kyllä integrointi muuttuu huomattavasti vaikeammaksi heti, kun tämä integrointialue ei enää ole yksinkertainen suorakulmio. Alla kappaleessa 18 käsittelemme tapausta, jossa integrointi yli monimutkaisempien alueiden onnistuu valitsemalla sopiva integrointijärjestys. Kappaleessa 19 taas käsitellään tapaus, jossa integrointi onnistuu muuttujanvaihdoksella.

18 Tasointegraalin laskeminen monimutkaisemmassa joukossa

Tasointegraalin $\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ laskeminen suorakulmiossa $A = [a,b] \times [c,d]$ ei ole sen vaikeampaa kuin yhden muuttujan funktion integroiminen. Tässä tapauksessa tämä yhden muuttujan integrointi pitää vain suorittaa kaksi kertaa peräkkäin: ensin x:n ja sen jälkeen y:n suhteen tai toisin päin. Jatkossa käsitellään vaikeampaa tapausta, jossa A ei ole suorakulmio.

Käsitellään aluksi esimerkkitapaus, jossa integrointi tapahtuu kolmiossa, jonka kärkipisteinä ovat $(0,0), (0,1)$ ja $(1,0)$. Tämä integrointialue näyttää nyt seuraavalta:



Huomataan aluksi, että kolmion kärjet $(0,1)$ ja $(1,0)$ yhdistää viiva, joka on osa suoraa $y = 1 - x$. Tämän jälkeen huomataan, että tämä kolmio voidaan esittää alueena, jossa x on välillä $[0,1]$ ja y on välillä $0 \leq y \leq 1 - x$. Tämä huomio mahdollistaa integroinnin tässä kolmiossa.

Esimerkki 18.1. Integroidaan tässä kolmiossa funktio $f(x,y) = xy$. Kuten yllä mainittiin, tämä kolmio voidaan esittää alueena, jossa $0 \leq x \leq 1$ ja $0 \leq y \leq 1 - x$. Täten haluttu integraali saadaan laskemalla seuraava integraali:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} xy \mathrm{d}y \mathrm{d}x.$$

Huomaa, että tässä sisäintegraalina on y:n suhteen integroitava lauseke $\int_0^{1-x} xy \mathrm{d}y$. Tämä johtuu siitä, että y:n rajat ovat ”monimutkaiset” eli sisältävät x:n termejä. Nyt tämän integrointi sujuu suoraviivaisesti:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{1-x} xy \mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} xy\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\Big|_0^{1-x} x\frac{y^2}{2} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(x\frac{(1-x^2)}{2} \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 (x - x^3)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \Big|_0^1 (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}) \\
&= \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) \\
&= \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

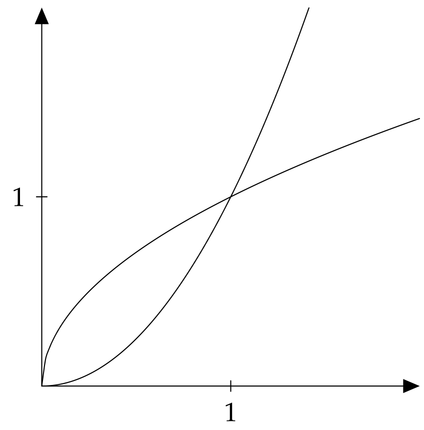
Yllä olevassa esimerkissä siis integrointialue esitettiin muodossa, jossa x oli kahden vakion välissä eli $a \le x \le b$ samalla kun y oli kahden x:ää sisältävän lausekkeen välissä eli $g_1(x) \le y \le g_2(x)$. Yllä olevassa esimerkissä siis $g_1(x) = 0$ ja $g_2(x) = 1 - x$. Usein siis integrointialue voidaan esittää nimenomaan tällaisessa muodossa eli alueena

$$\begin{gathered}
a \le x \le b \\
g_1(x) \le y \le g_2(x).
\end{gathered}$$

Tällaisen alueen yli integrointi suoritetaan laskemalla integraali

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Esimerkki 18.2. Tutkitaan nyt alla olevassa kuvassa näkyvää integrointialuetta, jossa x on välillä $[0, 1]$ ja y on välillä $x^2 \le y \le \sqrt{x}$:



Integroidaan tällä alueella funktio $f(xy) = xy$. Tämän integrointi sujuu yllä esitellyllä tavalla:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} (xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{1}{2}(xy^2)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{x}{2}(x - x^4)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2 - x^5)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\Big|_0^1 \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^6\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) \\
&= \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

Näissä kahdessa esimerkissä siis x oli yksinkertaisella välillä $[a, b]$ ja y oli x:n funktioiden välillä. Palataan nyt kolmioon, jossa $0 \leq x \leq 1$ ja $0 \leq y \leq 1 - x$. Huomataan, että täsmälleen saman kolmion voi esittää myös alueena $0 \leq y \leq 1$ ja $0 \leq x \leq 1 - y$. Eli tässä y on tietyllä yksinkertaisella välillä $[a, b]$ ja x on kahden y:n funktion välissä eli $g_1(y) \leq x \leq g_2(y)$. Nyt tällä välillä voi integroida esimerkiksi funktion $f(x,y) = x$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{1-y} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \Big|_0^{1-y} \frac{1}{2}x^2\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-y)^2\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-2y+y^2)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\Big|_0^1 (y-y^2+\frac{1}{3}y^3) \\
&= \frac{1}{2}(1-1^2+\frac{1}{3}1^3) \\
&= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Monet alueet voi siis esittää kahdessa muodossa: joko muodossa jossa x on välillä $[a,b]$ ja y välillä $[g_1(x), g_2(x)]$ tai muodossa y on välillä $[c,d]$ ja y välillä $[g_3(x), g_4(x)]$. Näiden alueiden muodostaminen on usein vaikeaa ellei niitä piirrä paperille.

Jos tehtävän integroimisalue voidaan esittää kahdessa eri muodossa (kuten yllä), niin usein integrointi on helpompaa toisella näistä alueista. Täten jos integrointi ei onnistu tietyllä alueella helposti, kannattaa miettiä josko tämän alueen voisi esittää eri muodossa.

19 Muuttujien vaihto: siirtyminen napakoordinaatteihin

Yhden muuttujan funktioiden tapauksessa integraalit ratkesivat usein muuttujanvaihdolla, jossa integraaliin $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ tehtiin korvaus $x = g(t)$. Tämän jälkeen korvattiin vielä termi $\mathrm{d}x$ termillä $g'(t)\mathrm{d}t$ ja laskettiin integraali

$$\int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t,$$

jossa integroinnit rajat on myös muutettu, kuten aina muuttujaa vaihdettaessa on muistettava tehdä.

Yhden muuttujan tapauksessa muuttujan vaihdossa ideana on siis laittaa x:n paikalle t:tä sisältävä lauseke $g(t)$, jonka avulla integraali on usein helppo laskea. Yhden muuttujan muuttujanvaihdos sisältää siis kolme elementtiä:

1. Jokainen integroitavan lausekkeen termi x korvataan termillä $g(t)$ eli jollakin t:n lausekkeella.

2. Termi dx korvataan termillä $g'(t)\mathrm{d}t$.

3. Integroinnin rajat ovat alun perin $x = a$ ja $x = b$. Nyt kun tehdään sijoitus $x = g(t)$, niin myös nämä rajat muuttuvat. Kun alkuperäinen raja on $x = a$, niin sijoituksesta $x = g(t)$ saadaan $g(t) = a \iff t = g^{-1}(a)$. Samoin rajasta $x = b$ saadaan raja $t = g^{-1}(b)$. Täten integraali saadaan muotoon

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t.$$

Tasointegraalin muuttujanvaihdoksessa on myös mukana nämä kolme elementtiä. Tarkastellaan nyt tasointegraalia

$$\iint_A (xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Ensimmäinen muuttujanvaihdoksen elementti on **sijoitus**. Tässä siis x ja y korvataan joillakin muilla termeillä. Nyt x korvataan termillä jota merkitään $x(u,v)$ eli x korvataan kahden muuttujan funktiolla $x(u,v)$. Samoin y korvataan kahden muuttujan funktiolla $y(u,v)$. Otetaan esimerkiksi muunnos, jossa $x(u,v) = u + v$ ja $y(u,v) = u - v$ Tällöin integroitava lauseke xy saadaan muotoon $(u+v)(u-v) = u^2 - v^2$.

Toinen muuttujanvaihdoksen elementti on, että termi dxdy korvataan jollakin toisella termillä. Tämä termi on monimutkaisempi kuin yhden muuttujan tapauksessa, koska sijoitetut funktiot ovat nyt kahden muuttujan funktioita. Tarkastellaan yleistä sijoitusta

$$\begin{aligned} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v). \end{aligned}$$

Nyt termi dxdy korvataan termillä $|J|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$. Tässä termi J on **Jakobin determinantti**, joka on yhtä kuin

$$J = \frac{\partial x(u,v)}{\partial u} \cdot \frac{\partial y(u,v)}{\partial v} - \frac{\partial x(u,v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial y(u,v)}{\partial u}.$$

Jos esimerkiksi

$$\begin{aligned} x(u,v) &= u+v \\ y(u,v) &= u-v, \end{aligned}$$

niin $\frac{\partial x(u,v)}{\partial u} = 1$, $\frac{\partial x(u,v)}{\partial v} = 1$, $\frac{\partial y(u,v)}{\partial u} = 1$ ja $\frac{\partial y(u,v)}{\partial v} = -1$. Tällöin Jakobin determinantti on $1 \cdot (-1) - 1 \cdot (1) = -2$. Täten tämän muuttujanvaihdoksen tapauksessa termi $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ korvataan termillä $|-2|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ eli termillä $2\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

Esimerkki 19.1. Tarkastellaan edelleen muuttujanvaihdosta $x(u,v) = u + v$, $y(u,v) = u - v$. Lasketaan integraali

$$\iint_A (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

tällä muuttujanvaihdoksella. Olkoon integrointialue suorakulmio $A = [-1,1] \times [0,2]$. Ensin pitää katsoa miten tämä alue muuntuu tässä muuttujanvaihdoksessa. Ratkaistaan ensin yhtälöt $x = u + v$ ja $y = u - v$ muuttujien u ja v suhteen. Tästä saadaan ratkaistua

$$\begin{aligned} u &= \frac{x+y}{2} \\ v &= \frac{x-y}{2}. \end{aligned}$$

Täten, kun x on välillä $-1 \leq x \leq 1$ ja y on välillä $0 \leq y \leq 2$, niin yllä olevista yhtälöistä nähdään, että u on välillä $(-1/2, 3/2)$ ja v on välillä $[-3/2, 1/2]$.

Lisäksi pitää muistaa sijoittaa termin $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ paikalle termi $|J|\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 2\mathrm{d}u\mathrm{d}v$:

$$\begin{aligned}
\iint_A (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-3/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{3/2}((u+v)+(u-v))2\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int_{-3/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{3/2}(2u)2\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int_{-3/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{3/2}(4u)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int_{-3/2}^{1/2}\Big|_{-1/2}^{3/2}(2u^2)\mathrm{d}v \\
&= \int_{-3/2}^{1/2}(9/2-1/2)\mathrm{d}v \\
&= \int_{-3/2}^{1/2}(4)\mathrm{d}v \\
&= \Big|_{-3/2}^{1/2}(4v)\mathrm{d}v \\
&= 2-(-3) \\
&= 5.
\end{aligned}$$

Tässä siis tehtiin kohtalaisen yksinkertainen muuttujanvaihto: siinä siirryttiin muuttujista x ja y muuttujiin u ja v. Usein tehdään kuitenkin kunnianhimoisempia muuttujanvaihtoja. Tasointegraalin tapauksessa tyypillisin lienee siirtyminen napakoordinaatteihin. Tässä ideana on vaihtaa muuttujat x ja y muuttujiin r ja θ tekemällä muuttujanvaihto

$$\begin{aligned}
x(r,\theta) &= r\cos\theta \\
y(r,\theta) &= r\sin\theta.
\end{aligned}$$

Tämä muuttujanvaihto voi vaikuttaa nopeasti katsottuna hieman eksoottiselta, mutta tässä on ideana se että kun summataan näiden neliöt eli x^2+y^2, niin saadaan

$$\begin{aligned}
(x(r,\theta))^2+(y(r,\theta))^2 &= r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta \\
&= r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta) \\
&= r^2
\end{aligned}$$

koska $\cos^2\theta+\sin^2\theta = 1$. Täten jos integroitavassa lausekkeessa on termi x^2+y^2, niin napakoordinaattimuunnoksella

$$\begin{aligned}
x(r,\theta) &= r\cos\theta \\
y(r,\theta) &= r\sin\theta
\end{aligned}$$

tämä termi $x^2 + y^2$ voidaan korvata termillä r^2. Tämä mahdollistaa monien integraalien laskemisen.

Napakoordinaattimuunnoksessa termi $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ pitää luonnollisesti korvata termillä $|J|\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$. Lasketaan siis nyt Jakobin determinantti:

$$
\begin{aligned}
J &= \frac{\partial x(r,\theta)}{\partial r} \cdot \frac{\partial y(r,\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial x(r,\theta)}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial y(r,\theta)}{\partial r} \\
&= \cos\theta(r\cos\theta) - (-r\sin\theta)(\sin\theta) \\
&= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta \\
&= r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\
&= r.
\end{aligned}
$$

Täten Jakobin determinantti on napakoordinaattimuunnoksen tapauksessa r.

Esimerkki 19.2. Integroi

$$\iint_A \sqrt{x^2 + y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kun A on yksikköympyrä eli $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Ratkaisu. Siirrytään napakoordinaatteihin, mikä tässä tapauksessa onnistuu sijoituksella $x^2 + y^2 = r^2$. Tällöin integroitava lauseke $\sqrt{x^2 + y^2}$ saadaan muotoon $\sqrt{r^2} = r$.

Nyt integroinnin rajat pitää myös muuttaa. Koska alueena on $x^2 + y^2 \leq 1$, niin $r^2 \leq 1$. Täten laitetaan r väille $[0, 1]$. Vastaavasti napakoordinaattimuunnoksessa θ tulkitaan kulmana. Koska integrointialueena on koko yksikköympyrä, annetaan tämän kulman θ kulkea koko matkansa eli

$0 \leq \theta \leq 2\pi$. Täten integrointi suoritetaan seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \Big|_0^1 \frac{1}{3}r^3\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\mathrm{d}\theta \\
&= \Big|_0^{2\pi} \frac{1}{3}\theta \\
&= \frac{2\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

Esimerkki 19.3. Olkoon A joukko $\{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$ eli yksikköympyrä. Lasketaan nyt integraali

$$\iint_A e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Tätä on vaikeaa integroida ilman muuttujanvaihtoa. Koska integroitava lauseke sisältää termin x^2+y^2, on napakoordinaattimuunnos luonnollinen tapa edetä. Eli tehdään korvaus

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,$$

jolloin termi x^2+y^2 voidaan korvata termillä r^2. Jakobin determinantti J laskettiinkin jo yllä: se on r. Lopuksi muunnetaan vielä integrointirajat: kun $x^2+y^2 \leq 1$ niin luonnollisesti $r^2 \leq 1$. Täten saadaan raja $0 \leq r \leq 1$.

Vastaavasti $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Täten integrointi sujuu seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\iint_A e^{x^2+y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{r^2} |J| \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 e^{r^2} r\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\Big|_0^1 \frac{1}{2} e^{r^2} \right) \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (e-1) \, \mathrm{d}\theta \\
&= \Big|_0^{2\pi} \frac{1}{2} (e-1) \, \theta \\
&= \frac{1}{2} (e-1) \, 2\pi \\
&= \pi (e-1)
\end{aligned}$$

Näissä esimerkeissä integrointialue oli siis koko yksikköympyrä. Käsitellään seuraavaksi tapaus, jossa integroitavana on kahden ympyrän välissä oleva alue.

Esimerkki 19.4. Integroi

$$\iint_A \sqrt{x^2+y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kun A on alue $A = \{(x,y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Ratkaisu. Nyt integrointialue on $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ eli $1 \leq r^2 \leq 4$ eli

$1 \leq r \leq 2$. Lisäksi kulman θ annetaan jälleen olla välillä $[0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned}
\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi}\int_1^2 \sqrt{r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_1^2 (r) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_1^2 r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \Big|_1^2 \frac{1}{3}r^3\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (\frac{8}{3}-\frac{1}{3})\mathrm{d}\theta \\
&= \Big|_0^{2\pi} (\frac{7}{3})\theta \\
&= \frac{14\pi}{3}.
\end{aligned}$$

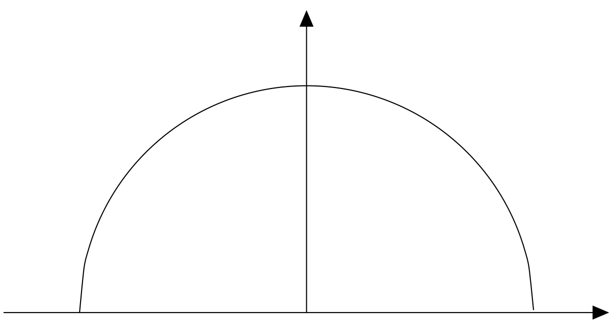
Toinen tapa, jolla integroinnin rajat voivat erota aiemmasta, on että meillä ei ole integrointialueena enää täysi ympyrä, vaan ainoastaan tietty ympyrän osa. Tällöin kulma θ ei enää mene täyttä kierrosta $[0, 2\pi]$, vaan ainoastaan osan tästä.

Esimerkki 19.5. Integroi

$$\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kun A on nyt alue $A = \{(x, y) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0\}$.

Ratkaisu. Nyt integrointialueella pätee $0 \leq x^2 + y^2 \leq 9$ eli $0 \leq r \leq 3$. Nyt on kuitenkin voimassa lisärajoitus $y \geq 0$. Tällöin integrointialueena on puoliympyrä eli kuvassa näkyvä alue:



Tällöin kulma θ kulkee puoliympyrän verran, jolloin $0 \le \theta \le \pi$. Lasketaan nyt tämä integraali näillä rajoilla:

$$\begin{aligned}
\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{\pi}\int_0^3 (r)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^3 r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi} |_0^3 \frac{1}{3}r^3\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi} (9)\mathrm{d}\theta \\
&= \Big|_0^{\pi} 9\theta \\
&= 9\pi.
\end{aligned}$$

20 Avaruusintegraali

Aiemmin laskimme yksiulotteisia integraaleja $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, jossa integrointialue on x-akselin väli $[a,b]$. Lisäksi laskimme kaksiulotteisia integraaleja $\iint_A g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, jossa integrointialue A puolestaan löytyi tasosta eli $A \in \mathbb{R}^2$.

Nyt siirrymme kolmanteen ulottuvuuteen ja laskemme integraaleja, joissa integrointialue A on kolmiulotteisessa avaruudessa eli $\mathbb{R}^3$:ssa. Tällaista **avaruusintegraalia** merkitään

$$\iiint_A f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}ydz.$$

Tässä siis kolmen muuttujan funktio $f(x,y,z)$ integroidaan kaikkien kolmen muuttujansa x:n, y:n ja z:n suhteen.

Integrointialueen A muoto ratkaisee jälleen, kuinka helppoa integrointi käytännössä on. Helppoa tämä integrointi on silloin, jos A on suorakulmainen särmiö eli

$$A = [a,b] \times [c,d] \times [p,q].$$

Eli toisin sanottuna A on tässä joukko, jossa $x \in [a,b]$, $y \in [c,d]$ ja $z \in [p,q]$ eli kaikki muuttujat rajoitetaan vakioväleille. Tällöin integrointi sujuu suoraviivaisesti integroimalla funktio jokaisen muuttujansa suhteen vuoron perään:

$$\boxed{\iiint_A f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_p^q \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.}$$

Esimerkki 20.1. Integroidaan funktio $f(x,y,z) = xyz$ joukossa $A = [1,2] \times [3,4] \times [0,2]$. Tässä siis integroinnin rajat ovat nyt $x \in [1,2]$, $y \in [3,4]$ ja $z \in [0,2]$. Käytetään integrointiin yllä olevaa kaavaa:

$$\begin{aligned}
\iiint_A f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_p^q \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \int_0^2 \int_3^4 \int_1^2 (xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Nyt tämän integraalin voi laskea missä järjestyksessä haluaa. Integroidaan tämä alla ensin x, sitten y:n ja lopulta z:n suhteen:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_3^4 \int_1^2 (xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^2 \int_3^4 \Big|_1^2 \frac{1}{2}(x^2yz)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 \int_3^4 yz\Big|_1^2 (x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 \int_3^4 yz(3)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 \Big|_3^4 \frac{3}{2}(y^2z)\mathrm{d}z \\
&= \frac{3}{4}\int_0^2 z\Big|_3^4 y^2\mathrm{d}z \\
&= \frac{3}{4}\int_0^2 z(7)\mathrm{d}z \\
&= \frac{3}{4}\Big|_0^2 \frac{7}{2}z^2 \\
&= \frac{3}{4}\left(\frac{7}{2}\cdot 4\right) \\
&= \frac{21}{2}.
\end{aligned}$$

Tämä lasku siis on kohtalaisen pitkä, mutta suoraviivainen.

Esimerkki 20.2. Edellisessä esimerkissä integraali laskettiin integroimalla ensin x:n, sitten y:n ja lopuksi z:n suhteen. Tämän integroinnin voi suorittaa tällaisen suorakulmaisen särmiön tapauksessa myös muussa järjestyksessä. Tulos on sama. Lasketaan tämä integraali alla integroimalla ensin y:n, sitten z:n ja lopuksi x:n suhteen:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_3^4 \int_1^2 (xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^2 \int_1^2 \int_3^4 (xyz)dy\mathrm{d}zdx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 \int_1^2 \Big|_3^4 (xy^2z)\mathrm{d}zdx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 \int_1^2 xz \Big|_3^4 (y^2)\mathrm{d}zdx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 \int_1^2 xz(7)\mathrm{d}zdx \\
&= \frac{7}{4} \int_0^2 \Big|_1^2 xz^2 dx \\
&= \frac{7}{4} \int_0^2 3xdx \\
&= \frac{21}{8} \Big|_0^2 x^2 dx \\
&= \frac{21}{2}.
\end{aligned}$$

Tulos on siis sama. Huomaa, että termien dx, dy ja dz järjestys kertoo integrointijärjestyksen. Täten esimerkiksi dzdxdy tarkoittaa, että integrointi suoritetaan ensin z:n, sitten x:n ja lopuksi y:n suhteen.

21 Avaruusintegraali yli monimutkaisempien alueiden

Yllä todettiin, että avaruusintegraalien laskeminen suorakulmaisissa särmiöissä on kohtalaisen suoraviivaista. Integrointialueena on kuitenkin usein jokin avaruuden $\mathbb{R}^3$ monimutkaisempi osajoukko. Integrointirajojen muodostaminen on tällöin usein vaikeaa.

Tarkastellaan nyt integrointia yleisessä avaruuden joukossa $A \subset R^3$. Haluamme siis laskea integraalin

$$\iiint_A f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Tämän laskeminen onnistuu samalla tekniikalla kuin aikaisemmin esimerkiksi silloin, kun pystymme esittämään alueen A seuraavanlaisena joukkona:

$$\begin{gathered} a \leq x \leq b, \\ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x), \\ v_1(x,y) \leq z \leq b \leq v_2(x,y). \end{gathered}$$

Tässä siis x on vakiovälillä $[a,b]$. Muuttujan y puolestaan sallitaan olevan kahden x:n funktion välissä. Muuttujan z taas sallitaan olla funktioiden $v_1(x,y)$ ja $v_2(x,y)$ välissä. Tässä on siis kolme ehtoa:

1. Muuttujan x rajat eivät saa riippua muista muuttujista: x on vakiovälillä.

2. Muuttujan y rajat saavat riippua x:stä: y on funktioiden $\phi_1(x)$ ja $\phi_1(x)$ välissä.

3. Muuttujan z rajat saavat riippua x:stä *ja* y:stä. Muuttuja z on funktioiden $v_1(x,y)$ ja $v_2(x,y)$ välissä.

Jos alue A pystytään esittämään tässä muodossa, niin haluttu integraali saadaan laskettua seuraavalla kaavalla:

$$\boxed{\iiint_A f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{v_1(x,y)}^{v_2(x,y)} f(x,y,x)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x.}$$

Eli: Integroidaan funktio $f(x,y,z)$ ensin z suhteen integrointirajoilla $v_1(x,y)$ ja $v_2(x,y)$. Seuraavaksi integroidaan syntynyt lauseke y:n suhteen integrointirajoilla $\phi_1(x)$ ja $\phi_2(x)$. Lopuksi integroidaan tästä syntynyt lauseke x:n suhteen välillä $[a,b]$.

Esimerkki 21.1. Lasketaan avaruusintegraali

$$\iiint_A (1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kun A on joukko jota rajaa taso $2x+y+3z=12$ ja koordinaattitasot $x=0$, $y=0$ ja $z=0$. Nyt tämä alue pitäisi kirjoittaa yllä esitellyssä muodossa. Ratkaistaan aluksi yhtälö $2x+y+3z=12$ muuttujan z suhteen:

$$z = \frac{1}{3}(12-2x-y).$$

Tämä on nyt z:n yläraja. Sen alaraja saadaan ehdosta $z = 0$, joten

$$0 \leq z \leq \frac{1}{3}\left(12 - 2x - y\right).$$

Muuttujan y rajat puolestaan saadaan ratkaisemalla lauseke $2x + y + 3z = 12$ muuttujan y suhteen:

$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 12 \\ y &= 12 - 2x - 3z. \end{aligned}$$

Tässä y on suurimmillaan, kun z on pienimmillään: kun $z = 0$. Yllä olevasta yhtälöstä nähdään että tällöin $y = 12 - 2x$. Tämä on y:n yläraja. Muuttujan y alaraja on 0. Täten y on välillä $[0, 12 - 2x]$.

Muuttujan x rajat nähdään myös katsomalla yhtälöä $2x + y + 3z = 12$. Tästä nähdään, että x on integrointialueella suurimmillaan silloin kun y ja z ovat minimissään, eli silloin kun $y = 0$ ja $z = 0$. Tällöin $x = 6$. Täten $0 \leq x \leq 6$.

Nyt kun rajat on ratkaistu, tämän funktion integrointi voidaan suorittaa suoraviivaisesti:

$$\begin{aligned} \iiint_A (1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{v_1(x,y)}^{v_2(x,y)} (1)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_0^3 \int_0^{12-2x} \int_0^{\frac{1}{3}(12-2x-y)} (1)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Tässä oli integroinnin vaikea osuus: kun rajat on muodostettu, etenee integrointi suoraviivaisesti: ensin integroidaan funktio $f(x, y, x) = 1$ muuttujan z suhteen, sitten y:n suhteen ja lopuksi x:n suhteen:

$$\begin{aligned}
&\int_0^3 \int_0^{12-2x} \int_0^{\frac{1}{3}(12-2x-y)} (1)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 \int_0^{12-2x} \Big|_0^{\frac{1}{3}(12-2x-y)} (z)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 \int_0^{12-2x} \frac{1}{3}\left(12-2x-y\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 \Big|_0^{12-2x} \frac{1}{3}\left(12y-2xy-\frac{1}{2}y^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 \Big|_0^{12-2x} \left(4y-\frac{2}{3}xy-\frac{1}{6}y^2\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 \left(4\left(12-2x\right)-\frac{2}{3}x\left(12-2x\right)-\frac{1}{6}\left(12-2x\right)^2\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 \left(\frac{2}{3}x^2-8x+24\right)\mathrm{d}x \\
&= \Big|_0^3 \left(\frac{2}{9}x^3-4x^2+24x\right) \\
&= 6-4\cdot 3^2+24\cdot 3 \\
&= 42.
\end{aligned}$$

Yllä olevassa esimerkissä siis meillä oli neljä tasoa: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ja $2x + y + 3z = 24$. Nämä tasot rajoittivat integrointialueen A. Tehtävän haaste oli löytää sopivat integroinnin rajat. Yhtälöistä $z = 0$ ja $2x + y + 3z = 24$ oli kohtalaisen suoraviivaista ratkaista z:n rajat. Muuttujan y rajat puolestaan saatiin ratkaistua valitsemalla $z = 0$ yhtälössä $2x + y + 3z = 24$.

22 Muuttujan vaihto: sylinterikoordinaatit

Myös kolmen muuttujan funktiota $f(x,y,z)$ integroitaessa voidaan tehdä muuttujanvaihdos. Nyt muuttujat x, y ja z korvataan lausekkeilla, jotka sisältävät muuttujia u, v ja w:

$$\begin{aligned}
x &= x(u,v,w) \\
y &= y(u,v,w) \\
z &= z(u,v,w).
\end{aligned}$$

Nyt siis x korvataan funktiolla $x(u, v, w)$, y korvataan funktiolla $y(u, v, w)$ ja z korvataan funktiolla $z(u, v, w)$. Esimerkki tällaisesta muuttujanvaihdoksesta on

$$\begin{aligned} x &= u + v \\ y &= u - v \\ z &= z, \end{aligned}$$

jossa siis z pysyy omana itsenään, mutta muuttujat x ja y muuntuvat. Tämä on kuitenkin hyvin yksinkertainen muuttujanvaihdos. Käytännössä kaksi käytetyintä muuttujanvaihdosta avaruusintegraaleille ovat siirtyminen **sylinterikoordinaatteihin** ja siirtyminen **pallokoordinaatteihin**.

Seuraavassa oletamme, että determinantin laskukaava on tuttu. Jos näin ei ole, kannattaa hyväksyä tulokset sellaisinaan.

Sylinterikoordinaattimuunnos on melkein sama kuin aiemmin käsitelty siirtyminen napakoordinaatteihin. Se on seuraava muunnos:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z. \end{aligned}$$

Tässä siis muuttujat x ja y korvataan täsmälleen samoilla muuttujilla kuin napakoordinaattimuunnoksen tapauksessa. Muuttuja z ei tässä muunnoksessa muunnu. Tämän muunnoksen Jakobin determinantti on sama kuin napakoordinaattimuunnoksella:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} \cdot 1 \\ &= \cos\theta\,(r\cos\theta) - (-r\sin\theta(\sin\theta)) \\ &= r\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) \\ &= r. \end{aligned}$$

Täten sylinterikoordinaatteihin siirryttäessä integraali muuttuu seuraavasti:

$$\boxed{\iiint_A f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_D f\left(r\cos\theta, r\sin\theta, z\right) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z,}$$

jossa alkuperäinen integrointialue A muuntuu sylinterikoordinaatteihin siirryttäessä alueeksi D.

Sylinterikoordinaatteihin siirryttäessä on sama etu kuin napakoordinaatteihin siirryttäessä: termi $x^2 + y^2$ voidaan korvata yksinkertaisella termillä r^2. Tätä muunnosta kannattaa käyttää muun muassa silloin, kun integrointialue A on muotoa $x^2 + y^2 \leq a$ ja $c \leq z \leq d$, eli jos integrointialue on sylinterin muotoinen.

Esimerkki 22.1. Lasketaan integraali

$$\iiint_A (xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

jossa alue A on sylinteri $x^2 + y^2 \leq 1$ ja $0 \leq z \leq 1$. Koska $x^2 + y^2 = r^2$, niin muuttujan r rajat ovat $0 \leq r \leq 1$. Puolestaan muuttuja θ on tuttuun tapaan välillä $[0, 2\pi]$, koska integrointialueena on koko sylinteri eikä esimerkiksi sylinterinpuolikas. Koska muuttuja z ei muunnu sylinterimuunnoksessa mihinkään, sen rajat eivät muutu eli $0 \leq z \leq 1$. Täten integrointi sujuu tällä kertaa seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\iiint_A (xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r\cos\theta)\,(r\sin\theta)\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(r^3 \cos\theta\sin\theta\right) \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \Big|_0^1 \left(\frac{1}{4} r^4 \cos\theta\sin\theta\right) d\theta\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 \int_0^{2\pi} (\cos\theta\sin\theta)\, d\theta\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 \Big|_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\sin\theta)^2\,\mathrm{d}z \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Tässä integrointi suoritettiin siis koko sylinterissä, koska kulma θ oli täydellä välillään $[0, 2\pi]$. Huomaa lisäksi, että tulos kertoo että funktio