Korjaus Harjoitus 3 ratkaisuihin

Tehtävä 2: Laske funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \|x\|^{\alpha}$$

osittaisderivaatat origon ulkopuolella, kun $\alpha \in \mathbb{R}$. Millä vakion α arvoilla osittaisderivaat ovat olemassa myös origossa?

Ratkaisu: Funktio on määritelty origossa, jos $\alpha \geq 0$. Lisäksi osittaisderivaatta on olemassa origossa, jos seuraava raja-arvo on olemassa

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(he_i) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|^{\alpha}}{h}.$$

Tämä raja-arvo on olemassa kun $\alpha > 1$ ja tällöin

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = \lim_{h \to 0} |h|^{\alpha - 1} \operatorname{sign} h = 0,$$

missä $\operatorname{sign} h = 1$,kun $h > 0$, ja $\operatorname{sign} h = -1$,kun $h < 0$.