HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus logiikkaan I, syksy 2018
Harjoitus 4 – Ratkaisuehdotukset

1. Etsi lauseen $(p_0 \vee (p_1 \to p_0)) \leftrightarrow p_1$ kanssa loogisesti ekvivalentti lause joka on

   (a) disjunktiivisessa normaalimuodossa,
   (b) konjunktiivisessa normaalimuodossa.

   Ratkaisu: Lauseen totuustauluksi saadaan allaoleva.

p_0	p_1	$(p_0$	$\vee$	$(p_1$	$\to$	$p_0))$	$\leftrightarrow$	p_1
1	1	1	1	1	1	1	**1**	1
1	0	1	1	0	1	1	**0**	0
0	1	0	0	1	0	0	**0**	1
0	0	0	1	0	1	0	**0**	0

   (a) Lukemalla ykkösrivit lauseeksi saadaan $p_0 \wedge p_1$.

   (b) Lukemalla nollarivit lauseeksi saadaan

$$(\neg p_0 \vee p_1) \wedge (p_0 \vee \neg p_1) \wedge (p_0 \vee p_1).$$

2. Etsi lauseen $((p_0 \to p_1) \wedge \neg(p_1 \to p_2)) \leftrightarrow (p_0 \to p_2)$ kanssa loogisesti ekvivalentti lause joka on

   (a) disjunktiivisessa normaalimuodossa,
   (b) konjunktiivisessa normaalimuodossa.

   Ratkaisu: Lauseen totuustauluksi saadaan allaoleva.

p_0	p_1	p_2	$((p_0$	$\to$	$p_1)$	$\wedge$	$\neg$	$(p_1$	$\to$	$p_2))$	$\leftrightarrow$	$(p_0$	$\to$	$p_2)$
1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	**0**	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	**0**	1	0	0
1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	**0**	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	**1**	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	**0**	0	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	**1**	0	1	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	**0**	0	1	1
0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	**0**	0	1	0

   (a) Lukemalla ykkösrivit lauseeksi saadaan

$$(p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_0 \wedge p_1 \wedge \neg p_2).$$

(b) Lukemalla nollarivit lauseeksi saadaan

$$(\neg p_0 \vee \neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_0 \vee \neg p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_0 \vee p_1 \vee \neg p_2) \\ \wedge (p_0 \vee \neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_0 \vee p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_0 \vee p_1 \vee p_2).$$

3. Peircen nuoli on konnektiivi $\downarrow$ jolle pätee $v(A \downarrow B) = 1$ jos ja vain jos $v(A) = v(B) = 0$. Näytä, että $\{\downarrow\}$ on täydellinen konnektiivijoukko.

   Ratkaisu: Totuustauluista nähdään, että negaatiolla ja konjunktiolla on seuraavat toteutukset Peircen viivan avulla:

A	$\neg$	A	$\leftrightarrow$	$(A$	$\downarrow$	$A)$
1	0	1	**1**	1	0	1
0	1	0	**1**	0	1	0

A	B	$(A$	$\wedge$	$B)$	$\leftrightarrow$	$((A$	$\downarrow$	$A)$	$\downarrow$	$(B$	$\downarrow$	$B))$
1	1	1	1	1	**1**	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	0	**1**	1	0	1	0	0	1	0
0	1	0	0	1	**1**	0	1	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	**1**	0	1	0	0	0	1	0

   Koska ekvivalenssi $\neg A \leftrightarrow (A \downarrow A)$ on tautologia, ovat lauseet $\neg A$ ja $A \downarrow A$ loogisesti ekvivalentit, samoin $A \wedge B$ ja $((A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B))$.

   Materiaalissa todistetaan, että $\neg$ ja $\wedge$ muodostavat täydellisen konnektiivijoukon, joten korvaamalla ne ekvivalenteilla $\downarrow$-muodoilla kuten yllä nähdään, että $\{\downarrow\}$ on myös täydellinen konnektiivijoukko.

4. Olkoon $\circ$ konnektiivi jolle $v(A \circ B) = 1$ jos ja vain jos $v(A) \neq v(B)$. Näytä, että $\{\circ, \vee\}$ ei ole täydellinen konnektiivijoukko.

   Ratkaisu: Osoitetaan, että yhdenkään kyseisistä konnektiiveista muodostetun kaavan totuusfunktio ei ole negaation totuusfunktio $f\colon \{0,1\} \to \{0,1\}$, $f(x) = 1 - x$.

   Jos tällainen lause A olisi olemassa, täytyisi siinä esiintyä propositiosymboleista vain p_0:aa, jotta lauseen totuusfunktio olisi yksipaikkainen. Lauseen A tulisi siis olla muodostettu propositiosymbolista p_0 ja konnektiiveista $\vee$ ja $\circ$.

   Osoitetaan induktiolla ylläolevan mukaisen lauseen A rakenteen suhteen, että jos v on totuusjakauma, jolla $v(p_0) = 0$, niin $v(A) = 0$.

   Alkuaskel:

- $A = p_0$. Nyt $v(A) = v(p_0) = 0$ suoraan oletuksen mukaisesti.

Induktioaskeleet: induktio-oletuksena oletetaan, että todistettava väite pätee lauseille B ja C, eli $v(B) = v(C) = 0$.

- Tällöin myös lauseelle $A = B \vee C$ pätee $v(A) = 0$. Tämä seuraa heti disjunktion totuusmääritelmästä.
- Lisäksi lauseelle $A' = B \circ C$ pätee $v(A') = 0$, suoraan konnektiivin $\circ$ totuusmääritelmän nojalla.

Siten kaikilla lauseilla A, jotka ovat muodostettu propositiosymbolista p_0 ja konnektiiveista $\vee$ ja $\circ$, pätee $f_A(0) = 0$. Siispä yhdenkään lauseen totuusfunktio ei ole negaation totuusfunktio, mikä haluttiin osoittaa.

5. Muunna seuraavat lauseet klausuulimuotoon:

   (a) $(p_0 \wedge p_1) \to (p_2 \vee p_3)$
   (b) $(p_0 \vee p_1) \to (p_2 \wedge p_3)$
   (c) $\neg(p_0 \vee p_1 \vee p_2)$
   (d) $\neg(p_0 \wedge p_1 \wedge p_2)$
   (e) $(p_0 \to p_1) \to (p_1 \to p_2)$.

Ratkaisu: On hyödyksi muistaa ekvivalenssit $A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$ ja $\neg\neg A \Leftrightarrow A$, osittelulait $(A \vee B) \wedge C \Leftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ ja $(A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$ ja De Morganin säännöt $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ ja $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$.

(a) Konjunktiivinen normaalimuoto on

$$\begin{aligned}(p_0 \wedge p_1) \to (p_2 \vee p_3) &\Leftrightarrow \neg(p_0 \wedge p_1) \vee (p_2 \vee p_3)\\ &\Leftrightarrow \neg p_0 \vee \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3\end{aligned}$$

josta klausuulimuodoksi saadaan $\{\{\neg p_0, \neg p_1, \neg p_2, \neg p_3\}\}$.

(b) Konjunktiivinen normaalimuoto on

$$\begin{aligned}&(p_0 \vee p_1) \to (p_2 \wedge p_3)\\ &\Leftrightarrow \neg(p_0 \vee p_1) \vee (p_2 \wedge p_3)\\ &\Leftrightarrow (\neg p_0 \wedge \neg p_1) \vee (p_2 \wedge p_3)\\ &\Leftrightarrow (\neg p_0 \vee (p_2 \wedge p_3)) \wedge (\neg p_1 \vee (p_2 \wedge p_3))\\ &\Leftrightarrow ((\neg p_0 \vee p_2) \wedge (\neg p_0 \vee p_3)) \wedge ((\neg p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_3))\end{aligned}$$

missä kaksi viimeistä ekvivalenssia ovat osittelulaeista. Klausuulimuodoksi saadaan $\{\{\neg p_0, p_2\}, \{\neg p_0, p_3\}, \{\neg p_1, p_2\}, \{\neg p_1, p_3\}\}$.

(c) Konjunktiivinen normaalimuoto on

$$\neg(p_0 \vee p_1 \vee p_2) \Leftrightarrow \neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2$$

josta klausuulimuodoksi saadaan $\{\{\neg p_0\}, \{\neg p_1\}, \{\neg p_2\}\}$.

(d) Konjunktiivinen normaalimuoto on

$$\neg(p_0 \wedge p_1 \wedge p_2) \Leftrightarrow \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3$$

josta klausuulimuodoksi saadaan $\{\{\neg p_0, \neg p_1, \neg p_2\}\}$.

(e) Konjunktiivinen normaalimuoto on

$$\begin{aligned}
&(p_0 \to p_1) \to (p_1 \to p_2) \\
&\Leftrightarrow \neg(\neg p_0 \vee p_1) \vee (\neg p_1 \vee p_2) \\
&\Leftrightarrow (p_0 \wedge \neg p_1) \vee (\neg p_1 \vee p_2) \\
&\Leftrightarrow (p_0 \vee (\neg p_1 \vee p_2)) \wedge (\neg p_1 \vee (\neg p_1 \vee p_2)) \\
&\Leftrightarrow (p_0 \vee \neg p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_2)
\end{aligned}$$

josta klausuulimuodoksi saadaan $\{\{p_0, \neg p_1, p_2\}, \{\neg p_1, p_2\}\}$.

6. Mitkä klausuulit resoluutiosääntö tuottaa seuraavista klausuuleista?

(a) $\{\neg p_0, p_1, p_2\}$ ja $\{\neg p_2, p_3\}$,
(b) $\{p_0, \neg p_0\}$ ja $\{p_0, \neg p_0\}$,
(c) $\{\neg p_0, p_1, p_2\}$ ja $\{p_0, \neg p_1\}$,
(d) $\{\neg p_0, p_1, \neg p_2\}$ ja $\{\neg p_2, p_3, \neg p_4\}$.

Ratkaisu: Jos $p_i \in A$, niin joukon A voi esittää yhdisteenä $A' \cup \{p_i\}$ kahdella tapaa: $A = A \setminus \{p_i\} \cup \{p_i\}$ ja $A = A \cup \{p_i\}$, eli symbolin p_i voi joko ottaa pois tai jättää joukkoon A'. Tästä syystä resoluutiosääntö

$$\frac{A \cup \{p_i\} \quad B \cup \{\neg p_i\}}{A \cup B}$$

voi tuottaa jopa neljä erilaista joukkoa, riippuen siitä jättääkö symbolin p_i mukaan joukkoon A vai ei, ja $\neg p_i$:n joukkoon B vai ei.

(a) Symboli p_2 esiintyy molemmissa klausuuleissa, toisessa negatoituna, ja se on ainoa tällainen symboli. Soveltamalla resoluutiosääntöä sen yli saadaan klausuulit $\{\neg p_0, p_1, p_3\}$, $\{\neg p_0, p_1, p_2, p_3\}$, $\{\neg p_0, p_1, \neg p_2, p_3\}$ ja $\{\neg p_0, p_1, p_2, \neg p_2, p_3\}$.

(b) Resoluutiosääntöä voi soveltaa p_0:n yli, mutta riippumatta siitä jättääkö p_0:n ja $\neg p_0$:n joukkoihin vai ei, tuottaa sääntö ainoastaan itse klausuulin $\{p_0, \neg p_0\}$.

(c) Resoluutiosääntöä voi soveltaa sekä p_0:n että p_1:n yli. Symbolin p_0 yli saadaan klausuulit $\{p_1, \neg p_1, p_2\}$, $\{p_0, p_1, \neg p_1, p_2\}$, $\{\neg p_0, p_1, \neg p_1, p_2\}$ ja $\{p_0, \neg p_0, p_1, \neg p_1, p_2\}$. Symbolin p_1 yli saadaan tuotettua klausuulit $\{p_0, \neg p_0, p_2\}$, $\{p_0, \neg p_0, p_1, p_2\}$, $\{p_0, \neg p_0, \neg p_1, p_2\}$ ja $\{p_0, \neg p_0, p_1, \neg p_1, p_2\}$, joista viimeinen saatiin jo p_0:n yli.

(d) Vain symboli p_2 esiintyy kummassakin klausuulissa, mutta molemmissa negatoituna. Siis resoluutiosääntöä ei voi soveltaa kyseisiin klausuuleihin, eli sääntö ei tuota yhtään klausuulia.

7. Osoita resoluutiolla, että klausuulijoukko

$$\{\{\neg p_0, p_1, \neg p_2\}, \{p_2, p_1, p_3\}, \{\neg p_0, \neg p_1\}, \{p_0, \neg p_1\}, \{p_0, p_1\}, \{p_1, \neg p_3\}\}$$

ei ole toteutuva.

Ratkaisu: Päätellään annetuista klausuuleista tyhjä joukko:

1. $\{p_1, \neg p_3\}$ (oletus)
2. $\{p_2, p_1, p_3\}$ (oletus)
3. $\{p_2, p_1\}$ (resoluutio riveistä 1 ja 2)
4. $\{\neg p_0, p_1, \neg p_2\}$ (oletus)
5. $\{\neg p_0, p_1\}$ (resoluutio riveistä 3 ja 4)
6. $\{\neg p_0, \neg p_1\}$ (oletus)
7. $\{\neg p_0\}$ (resoluutio riveistä 5 ja 6)
8. $\{p_0, p_1\}$ (oletus)
9. $\{p_0, \neg p_1\}$ (oletus)
10. $\{p_0\}$ (resoluutio riveistä 8 ja 9)
11. $\{\}$ (resoluutio riveistä 7 ja 10)

jolloin lauseen 6.8 nojalla klausuulijoukko on ristiriitainen ja siten ei toteutuva.