HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus logiikkaan I, syksy 2018
Harjoitus 5 – Ratkaisuehdotukset

1. Päättele resoluutiolla $\emptyset$ seuraavista klausuulijoukoista:
   (a) $\{\{p_0\}, \{p_1\}, \{\neg p_0, p_2\}, \{p_1, \neg p_2, p_3\}, \{\neg p_2, \neg p_3\}, \{p_3\}\}$,
   (b) $\{\{\neg p_0, p_1, \neg p_2\}, \{p_0, p_1\}, \{\neg p_1, \neg p_2\}, \{p_2\}\}$,
   (c) $\{\{p_1, p_2, p_3\}, \{\neg p_2\}, \{\neg p_1, p_2\}, \{p_1, \neg p_3\}\}$.

   Ratkaisu:

(a)

1.	$\{\neg p_2, \neg p_3\}$	(oletus)
2.	$\{p_3\}$	(oletus)
3.	$\{\neg p_2\}$	(resoluutio riveistä 1 ja 2)
4.	$\{\neg p_0, p_2\}$	(oletus)
5.	$\{\neg p_0\}$	(resoluutio riveistä 3 ja 4)
6.	$\{p_0, \}$	(oletus)
7.	$\{\}$	(resoluutio riveistä 5 ja 6)

(b)

1.	$\{\neg p_0, p_1, \neg p_2\}$	(oletus)
2.	$\{p_0, p_1\}$	(oletus)
3.	$\{p_1, \neg p_2\}$	(resoluutio riveistä 1 ja 2)
4.	$\{\neg p_1, \neg p_2\}$	(oletus)
5.	$\{\neg p_2\}$	(resoluutio riveistä 3 ja 4)
6.	$\{p_2\}$	(oletus)
7.	$\{\}$	(resoluutio riveistä 5 ja 6)

(c)

1.	$\{p_1, p_2, p_3\}$	(oletus)
2.	$\{p_1, \neg p_3\}$	(oletus)
3.	$\{p_1, p_2\}$	(resoluutio riveistä 1 ja 2)
4.	$\{\neg p_1, p_2\}$	(oletus)
5.	$\{p_2\}$	(resoluutio riveistä 3 ja 4)
6.	$\{\neg p_2\}$	(oletus)
7.	$\{\}$	(resoluutio riveistä 5 ja 6)

2. Osoita resoluution avulla, että $(p_0 \wedge p_1) \rightarrow \neg p_2$ seuraa loogisesti oletuksesta $p_1 \rightarrow (\neg p_0 \vee \neg p_2)$.

   Ratkaisu: Jotta $(p_0 \wedge p_1) \rightarrow \neg p_2$ olisi lauseen $p_1 \rightarrow (\neg p_0 \vee \neg p_2)$ looginen seuraus, täytyy sen negaatio $\neg((p_0 \wedge p_1) \rightarrow \neg p_2)$ olla ristiriidassa oletuksen kanssa.

   Muutetaan propositiolauseet ensin klasuulijoukoiksi:

   Propostiolauseiden konjuktiiviset normaalimuodot ovat

$$p_1 \rightarrow (\neg p_0 \vee \neg p_2) \Leftrightarrow \neg p_1 \vee \neg p_0 \vee \neg p_2$$

   ja

$$\neg((p_0 \wedge p_1) \rightarrow \neg p_2) \Leftrightarrow \neg(\neg(p_0 \wedge p_1) \vee \neg p_2) \Leftrightarrow p_0 \wedge p_1 \wedge p_2),$$

   jolloin klasuulijoukoksi saadaan: $\{\{\neg p_1, \neg p_0, \neg p_2\}, \{p_0\}, \{p_1\}, \{p_2\}\}$.

   Päätellään seuraavaksi klasuulijoukko ristiriitaiseksi resoluution avulla:

   1. $\{\neg p_1, \neg p_0, \neg p_2\}$ (oletus)
   2. $\{p_0\}$ (oletus)
   3. $\{\neg p_1, \neg p_2\}$ (resoluutio riveistä 1 ja 2)
   4. $\{p_1\}$ (oletus)
   5. $\{\neg p_2\}$ (resoluutio riveistä 3 ja 4)
   6. $\{p_2\}$ (oletus)
   7. $\{\}$ (resoluutio riveistä 5 ja 6)

3. Osoita resoluution avulla, että $(p_0 \wedge \neg p_2) \rightarrow p_1$ seuraa loogisesti oletuksesta $(p_0 \leftrightarrow \neg p_2) \rightarrow p_1$.

   Ratkaisu: Todistetaan asia näyttämällä resoluutiolla, että $\neg((p_0 \wedge \neg p_2) \rightarrow p_1)$ ja $(p_0 \leftrightarrow \neg p_2) \rightarrow p_1$ ovat ristiriidassa keskenään.

   Muutetaan lauseet ensin klausuulimuotoon:

$$\neg((p_0 \wedge \neg p_2) \to p_1) \Leftrightarrow \neg(\neg(p_0 \wedge \neg p_2) \vee p_1) \Leftrightarrow p_0 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_1$$

ja

$$(p_0 \leftrightarrow \neg p_2) \to p_1 \Leftrightarrow \neg(p_0 \leftrightarrow \neg p_2) \vee p_1 \Leftrightarrow ((p_0 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_0 \vee p_2)) \vee p_1$$

$$\Leftrightarrow (p_0 \vee \neg p_2 \vee p_1) \wedge (\neg p_0 \vee p_2 \vee p_1)$$

Täten saadaan klausuulijoukko: $\{\{p_0\}, \{\neg p_2\}, \{\neg p_1\}, \{p_0, \neg p_2, p_1, \neg p_2\}, \{\neg p_0, p_2, p_1\}\}$[1]

Päätellään seuraavaksi klasuulijoukko ristiriitaiseksi resoluution avulla:

1. $\{p_2, p_1, \neg p_0\}$ (oletus)
2. $\{p_0\}$ (oletus)
3. $\{p_2, p_1\}$ (resoluutio riveistä 1 ja 2)
4. $\{\neg p_1\}$ (oletus)
5. $\{p_2\}$ (resoluutio riveistä 3 ja 4)
6. $\{\neg p_2\}$ (oletus)
7. $\{\}$ (resoluutio riveistä 5 ja 6)

4. Osoita resoluution avulla, että p_0 seuraa loogisesti oletuksista $p_0 \leftrightarrow p_1$, $p_1 \leftrightarrow p_2$ ja $p_0 \vee p_1 \vee p_2$.

   Ratkaisu: Propositiolause p_0 seuraa loogisesti oletuksista, jos $\neg p_0$ on ristiriidassa niiden kanssa. Muutetaan ensin myös $p_0 \leftrightarrow p_1$ ja $p_1 \leftrightarrow p_2$ konjuktiiviseen normaalimuotoon, jotta saadaan muodostettua klasuulijoukko.

$$p_0 \leftrightarrow p_1 \Leftrightarrow (p_0 \to p_1) \wedge (p_1 \to p_0) \Leftrightarrow (\neg p_0 \vee p_1) \wedge (\neg p_1 \vee p_0)$$

[1] Riippuen siitä, kuinka propositiolauseet on muutettu klausuulimuotoon saattaa klausuulijoukkoon kuulua lisäksi klausuulit $\{p_2, p_1, \neg p_2\}$ ja $\{p_0, p_1, \neg p_0\}$ nämä klausuulit ovat kuitenkin valideja, joten ne eivät vaikuta päättelyyn.

ja

$$p_1 \leftrightarrow p_2 \Leftrightarrow (p_1 \to p_2) \wedge (p_2 \to p_1) \Leftrightarrow (\neg p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_2 \vee p_1)$$

Konjuktiivisista normaalimuodoista saatu klasuulijoukko on:
$\{\{\neg p_0\}, \{\neg p_0, p_1\}, \{\neg p_1, p_0\}, \{\neg p_1, p_2\}, \{\neg p_2, p_1\}, \{p_0, p_1, p_2\}\}$

Päätellään seuraavaksi klasuulijoukko ristiriitaiseksi resoluution avulla:

1. $\{p_0, p_1, p_2\}$ (oletus)
2. $\{\neg p_2, p_1\}$ (oletus)
3. $\{p_0, p_1\}$ (resoluutio riveistä 1 ja 2)
4. $\{\neg p_1, p_0\}$ (oletus)
5. $\{p_0\}$ (resoluutio riveistä 3 ja 4)
6. $\{\neg p_0\}$ (oletus)
7. $\{\}$ (resoluutio riveistä 5 ja 6)

5. Olkoot A, B ja C propositiolauseita. Selvitä resoluution avulla onko $A \to \neg B$ lauseiden $A \to (B \to C)$ ja $\neg C$ looginen seuraus. Perustele resoluution käyttö, eli miksi ratkaisusi toimii.

Ratkaisu: Näytetään ensin resoluutiolla, että $p_0 \to \neg p_1$ on lauseiden $p_0 \to (p_1 \to p_2)$ ja $\neg p_2$ looginen seuraus. Muutetaan oletus $p_0 \to (p_1 \to p_2)$ ja väitteen $p_0 \to \neg p_1$ negaatio konnektiiviseen normaalimuotoon.

$$\neg(p_0 \to \neg p_1) \Leftrightarrow \neg(\neg p_0 \vee \neg p_1) \Leftrightarrow p_0 \wedge p_1$$

$$p_0 \to (p_1 \to p_2) \Leftrightarrow \neg p_0 \vee (p_1 \to p_2) \Leftrightarrow \neg p_0 \vee \neg p_1 \vee p_2$$

Klausuulijoukoksi saadaan: $\{\{p_0\}, \{p_1\}, \{\neg p_0, \neg p_1, p_2\}, \{\neg p_2\}\}$
Todistetaan joukko ristiriitaiseksi resoluutiolla

1. $\{\neg p_0, \neg p_1, p_2\}$ (oletus)
2. $\{\neg p_2\}$ (oletus)
3. $\{\neg p_0, \neg p_1\}$ (resoluutio riveistä 1 ja 2)
4. $\{p_1\}$ (oletus)
5. $\{\neg p_0\}$ (resoluutio riveistä 3 ja 4)
6. $\{p_0\}$ (oletus)
7. $\{\}$ (resoluutio riveistä 5 ja 6)

Nyt siis $p_0 \to \neg p_1$ on lausejoukon $\mathcal{A}$ looginen seuraus, joten lause

$$((p_0 \to (p_1 \to p_2)) \land \neg p_2) \to (p_0 \to \neg p_1)$$

on tautologia. Nyt intuitiivisesti on melko selvää, että jos jokin lause A' on tautologia, niin se pysyy tautologiana vaikka sen propositiosymbolit korvattaisiin toisilla propositiolauseilla. Esimerkiksi lause $p_0 \lor \neg p_0$ on tautologia ja selvästi myös $A \lor \neg A$ on tautologia riippumatta siitä mikä lause A on.

Osoitetaan asia vielä tarkasti. Näytetään tätä varten ensin, että propositiologiikassa pätee seuraava lause:

Olkoot $D_1, ..., D_n$ propositiolauseita jollain $n \in N$, v totuusjakauma ja v' sellainen totuusjakauma että

$$v'(p_i) = \begin{cases} v(D_i) & \text{, kun } i \in \{1, ..., n\}, \\ v(p_i) & \text{, muulloin} \end{cases}$$

Tällöin kaikilla propositiolauseilla A pätee $v'(A) = v(A[D_1/p_1, ..., D_n/p_n])$.

Merkintä $A[D_i/p_i]$ tarkoittaa lausetta, joka saadaan kun kaikki propositiosymbolin p_i esiintymät lauseessa A korvataan lauseella D_i. Käytetään lauseelle $A[D_1/p_1, ..., D_n/p_n]$ lyhennysmerkintää $A[\widetilde{D}/\widetilde{p}]$.

Todistus: Osoitetaan väite induktiolla lauseen A rakenteen suhteen.

Alkuaskel: Jos $A = p_i$ ja $i \in \{1, ..., n\}$, niin $A[\widetilde{D}/\widetilde{p}] = D_i$ ja jakauman v' määritelmän nojalla $v'(A) = v'(p_i) = v(D_i) = v(A[\widetilde{D}/\widetilde{p}])$.

Jos $A = p_j$ ja $j > n$, niin $A[\widetilde{D}/\widetilde{p}] = p_j$ ja saadaan $v'(A) = v'(p_j) = v(p_j) = v(A)$. Siis lause pätee propositiosymboleille.

Induktioaskel:

$A = \neg B$. Induktio-oletus: $v'(B) = v(B[\widetilde{D}/\widetilde{p}])$

Koska $A = \neg B$, niin $A(\widetilde{D}/\widetilde{p}) = \neg B(\widetilde{D}/\widetilde{p})$. Tällöin induktio-oletuksen nojalla $v'(A) = v'(\neg B) = 1 - v'(B) = 1 - v(B(\widetilde{D}/\widetilde{p})) = v(\neg B(\widetilde{D}/\widetilde{p})) = v(A(\widetilde{D}/\widetilde{p}))$. Siis lause pätee negaation tapauksessa.

$A = B \vee C$. Induktio-oletus: $v'(B) = v(B[\widetilde{D}/\widetilde{p}])$ ja $v'(C) = v(C[\widetilde{D}/\widetilde{p}])$.

Nyt kun $A = B \vee C$, niin $A[\widetilde{D}/\widetilde{p}] = B[\widetilde{D}/\widetilde{p}] \vee C[\widetilde{D}/\widetilde{p}]$. Induktio-olutuksen nojalla $v'(A) = v'(B \vee C) = v'(B) \cdot v'(C) = v(B[\widetilde{D}/\widetilde{p}]) \cdot v(C[\widetilde{D}/\widetilde{p}]) = v(B[\widetilde{D}/\widetilde{p}] \vee C[\widetilde{D}/\widetilde{p}]) = v(A[\widetilde{D}/\widetilde{p}])$. Väite pätee siis myös disjunktiolle.

Koska konnektiivijoukko $\{\neg, \vee\}$ on täydellinen, on haluttu lause todistettu kaikille propositiolauseille A.

Edellä todistetun lauseen suora seuraus on, että jos propositiolause A on tautologia ja $D_1, .., D_n$ mielivaltaisia propositiolauseita, niin myös lause $A(\widetilde{D}/\widetilde{p})$ on tautologia.
Todistus: Olkoon v mielivaltainen totuusjakauma ja määritellään sitten totuusjakauma v' kuten äsken todistetussa lauseessa. A:n tautologisuuden nojalla $v'(A) = v(A(\widetilde{D}/\widetilde{p})) = 1$. Koska v oli mielivaltainen, niin myös $A(\widetilde{D}/\widetilde{p})$ on tautologia.

Nyt voimme yhdistää äskeisen tuloksen ja tiedon, että lause $((p_0 \to (p_1 \to p_2)) \wedge \neg p_2) \to (p_0 \to \neg p_1))$ on tautologia ja saamme, että myös lause $((A \to (B \to C)) \wedge \neg C) \to (A \to \neg B)$ on tautologia riippumatta siitä minkälaisia lauseet A, B ja C ovat.

6. Propositiologiikan resoluutio pysähtyy aina eli jossain vaiheessa ei saada pääteltyä uusia klausuuleja. Laske yläraja resoluution pituudelle jos oletukset koostuvat m:stä klausuulista joissa jokaisessa on enintään n litteraalia.

   Ratkaisu:

   Olkoon $n, m \in \mathbb{N}_1$, $\mathcal{C} := \{A_1, \ldots, A_m\}$ joukko klausuuleja, $|\mathcal{C}| = m$ ja $|A_i| \leq n$ jokaisella $i \in \{1, \ldots, n\}$. Osoitetaan, että klausuulijoukosta $\mathcal{C}$ voidaan korkeintaan päätellä 2^{mn} klausuulia ja täten suurin päättelly, jossa ei toistu klausuuleja on pituudelta korkeintaan 2^{mn}.

   Todistus:

Koska resoluutiopäättellyssä ei synny uusia literaaleja, niin kaikki kokoelmasta $\mathcal{C}$ pääteltävät klausuulit koostuvat niistä literaaleista, jotka esiintyvät kokoelman $\mathcal{C}$ klausuuleissa.

Seuraava pätee yhdisteen alkioiden lukumäärälle eli tässä tapauksessa kaikkien literaalien lukumäärälle

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| \leq |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_m| \leq mn.$$

Jokaiselle kokoelmasta $\mathcal{C}$ pääteltävälle klausuulille C pätee, että

$$C \subset A_1 \cup \cdots \cup A_m.$$

Koska mielivaltaista osajoukkoa C konstruoitaessa voidaan jokaisesta literaalista valita, että se joko kuuluu tai ei kuuluu klausuuliin C, joten tuloperiaatteen nojalla tällaisia joukkoja C on täsmälleen $2^{|A_1 \cup \cdots \cup A_m|} \leq 2^{mn}$. Siten klausuulikokoelmasta $\mathcal{C}$ pääteltäviä klausuuleja on korkeintaan 2^{mn} kappeletta.

7. Muodosta luvun 6.1 tekniikalla $\mathcal{C}_A$, kun $A = p_0 \to \neg(p_0 \wedge p_1)$.

   Ratkaisu: Lauseen A alikaavat ovat $p_0 \to \neg(p_0 \wedge p_1), p_0, \neg(p_0 \wedge p_1), p_0 \wedge p_1$ ja p_1. Merkitään $B = p_0 \wedge p_1$

   Uudet A:n alilauseita vastaavat propositiosymbolit ovat $q_{p_0}, q_{p_1}, q_B, q_{p_{\neg B}}, q_A$. Nämä vastaavat siis oikeasti tavallisia propositiosymboleja, jotka eivät esiinny lauseessa A (esim. $q_{p_0} = p_2$ ja $q_{p_1} = p_3$ jne.), mutta selkeyden vuoksi niistä käytetään tällaista merkintää.

   Käydään läpi luvussa 6.1 esitelty menetelmä kohta kohdalta sen mukaan mitä alikaavoja lauseessa A esiintyy:

   Kohta 1:
   $$\{q_{p_0}, \neg p_0\}, \{\neg q_{p_0}, p_0\}, \{q_{p_1}, \neg p_1\}, \{\neg q_{p_1}, p_1\} \in \mathcal{C}_A.$$

   Kohta 4:
   $$\{\neg q_B, q_{p_0}\}, \{\neg q_B, q_{p_1}\}, \{q_B, \neg q_{p_0}, \neg q_{p_1}\} \in \mathcal{C}_A$$

   Kohta 2:
   $$\{q_B, q_{\neg B}\}, \{\neg q_B, \neg q_{\neg B}\} \in \mathcal{C}_A$$

Kohta 5:

$$\{\neg q_A, \neg q_{p_0}, q_{\neg B}\}, \{q_A, q_{p_0}\}, \{q_A, \neg q_{\neg B}\} \in \mathcal{C}_A$$

Kohta 7:

$$\{q_A\} \in \mathcal{C}_A$$

Joten $\mathcal{C}_A = \{\{q_{p_0}, \neg p_0\}, \{\neg q_{p_0}, p_0\}, \{q_{p_1}, \neg p_1\}, \{\neg q_{p_1}, p_1\}, \{\neg q_B, q_{p_0}\}, \{\neg q_B, q_{p_1}\},$ $\{q_B, \neg q_{p_0}, \neg q_{p_1}\}, \{q_B, q_{\neg B}\}, \{\neg q_B, \neg q_{\neg B}\}, \{\neg q_A, \neg q_{p_0}, q_{\neg B}\}, \{q_A, q_{p_0}\}, \{q_A, \neg q_{\neg B}\}, \{q_A\}\}$