Vektorianalyysi I

opettajat

Ritva Hurri-Syrjänen		sairaslomalla
Sirkka-Liisa Eriksson	B328	sirkka-liisa.eriksson@helsinki.fi

Perusasioita

Kurssissa on loppukoe

Harjoituksista saa bonuspisteitä seuraavasti

1 lisäpiste, jos 30% laskettu

2 lisäpistettä, jos 60% laskettu

3 lisäpistettä, jos 90% laskettu

ja kaikissa tapauksissa oppilaan tulee olla paikalla harjoituksissa ja valmiina esittämään ratkaisunsa taululla.

Sähköisesti tai paperilla palautettuja ratkaisuja ei oteta vastaan.

Luentomateriaalit kurssisivulta

Muuta oheismateriaali

Olli Martio, Vektorianalyysi, Limes 2008.

Esimerkkejä verkkomateriaaleista

Khan Academy Multivariable calculus https://www.khanacademy.org/ (opetusvideoita, hyvä johdatus ja tärkeimpiä tuloksia)

MITOPENCOURSES Multivriable calculus https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/

1 Euklidinen avaruus

Tällä kurssilla käsittelemme tasoa $\mathbb{R}^2$, avaruutta $\mathbb{R}^3$ ja yleistä n-ulotteista euklidista avaruutta $\mathbb{R}^n$. Siksi kertaamme perusasiat.

Merkitään

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, .., x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\} .$$

Määritellään tavalliset laskutoimistukset

$$(x_1, .., x_n) + (y_1, .., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$

ja

$$r\,(x_1, .., x_n) = (rx_1, .., rx_n)\,,$$

kun $(x_1, .., x_n), (y_1, .., y_n) \in \mathbb{R}^n$ ja $r \in \mathbb{R}$.

Alkion $(x_1, .., x_n)$ lukua x_k sanotaan k.koordinaatiksi tai k. komponentiksi.

Alkiota $(x_1, .., x_n)$ voidaan ajatella pisteeksi avaruudessa $\mathbb{R}^n$ tai vektoriksi, jonka alkupiste on $(0, .., 0)$ ja loppupiste $(x_1, .., x_n)$.

Lause 1.1 *Joukko $\mathbb{R}^n$ on vektoriavaruus edellä määriteltyjen laskutoimituksien suhteen. Toisin sanottuna seuraavat ominaisuudet ovat voimassa*

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ja $r\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$,

2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$, (vaihdantalaki eli kommutatiivisuus)

3. $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$ jokaiselle $\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n$ (liitäntälaki eli assosiatiivisuus),

4. on olemassa alkio $0\in\mathbb{R}^n$, joka toteuttaa ehdon $\mathbf{u}+0=\mathbf{u}$ jokaiselle $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n$(nolla-alkio),

5. jokaiselle $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n$ on olemassa alkio $-\mathbf{u}$, joka toteuttaa ehdon

$$\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=0,\qquad \text{(vasta-alkio)}$$

6. $r\,(\mathbf{u}+\mathbf{v})=r\mathbf{u}+r\mathbf{v}$, (osittelulaki eli distributiivisuus),

7. $(r+s)\,\mathbf{u}=r\mathbf{u}+s\mathbf{u}$ jokaiselle $s\in\mathbb{R}$,

8. $r(s\mathbf{u}) = (rs)\mathbf{u}$ jokaiselle $s \in \mathbb{R}$,

9. $\mathbf{1u} = \mathbf{u}$.

2 n-ulotteinen avaruus

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ lunnollinen kanta on $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$, missä

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= (1, 0, ..., 0)\,, \\
\mathbf{e}_2 &= (0, 1, ..., 0)\,, \\
&\vdots \\
\mathbf{e}_n &= (0, 0, ..., 1)\,.
\end{aligned}$$

Kanta tarkoittaa sitä, että jokainen avaruuden $\mathbb{R}^n$ piste voidaan esittää yksikäsitteisesti kannan alkioiden lineaarikombinaationa eli

$$(x_1, .., x_n) = x_1\mathbf{e}_1 + ... + x_n\mathbf{e}_n.$$

3 Sisätulo ja normi

Pisteen $x = (x_1, .., x_n)$ normi on

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 +,,, + x_n^2}$$

ja pisteiden $a = (a_1, a_2, ..a_n)$ ja $b = (b_1, ..., b_n)$ välinen euklidinen etäisyys on

$$d(b, a) = \|b - a\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 +, , , + (b_n - a_n)^2}.$$

Avaruudessa $\mathbb{R}^n$ on määritelty sisätulo eli pistetulo eli skalaaritulo seuraavasti

$$a \cdot b = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i, \text{ kun } a = (a_1, a_2, ..a_n) \text{ ´ja } b = (b_1, ..., b_n).$$

Lause 3.1 *Vektoriavaruus* $\mathbb{R}^n$ *on reaalinen sisätuloavaruus, toisin sanottuna joukossa* $\mathbb{R}^n$ *on määritelty sisätulo* $(\cdot)$, *joka toteuttaa seuraavat ominaisuudet*

1. $u \cdot v \in \mathbb{R}$ jokaiselle $u, v \in \mathbb{R}^n$,
2. $u \cdot v = v \cdot u$,
3. $\alpha u \cdot v = \alpha \left(u \cdot v \right).$
4. $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$,
5. $u \cdot u \geq 0$
6. $u \cdot u = 0$ jos ja vain jos $u = 0$

jokaiselle $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$.

Lause 3.2 *Vektoriavaruudessa* $\mathbb{R}^n$ *edellä määritellyt sisätulo ja normi toteuttavat seuraavat ominaisuudet*

1. $|u \cdot v| \leq \|u\| \, \|v\|$, *(Cauchy-Schwarz)*

2. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *(kolmioepäyhtälö)*

jokaiselle $u, v \in \mathbb{R}^n$.

Todistus. Väite on tosi, kun $v = 0$. Voidan olettaaa, että $v \neq 0$. Olkoon

$$\lambda = \frac{u \cdot v}{v \cdot v}.$$

Tällöin

$$0 \leq (u - \lambda v) \cdot (u - \lambda v) = u \cdot u - \frac{(u \cdot v)^2}{v \cdot v}.$$

■

Seuraus 3.3 *Jos $u \neq 0$ ja $v \neq 0$, niin*

$$\frac{|u \cdot v|}{\|u\| \, \|v\|} \leq 1.$$

Edellisen seurauksen nojalla voimme avaruudessa $\mathbb{R}^n$ määritellä alkioiden (vektoreiden) u ja v valisen kulman α asettamalla

$$\cos\alpha = \frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|}.$$

Esimerkki 3.4 *Mikä on normi ja etäisyys avaruuksissa $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$?*

Lause 3.5 *Vektoriavaruus $\mathbb{R}^n$ on normiavaruus. Tosin sanottuna joukossa $\mathbb{R}^n$ on määritelty normi $\|\|$, joka toteuttaa ominaisuudet:*

1. $\|u\| \geq 0$ jokaiselle $u \in \mathbb{R}^n$;

2. Jos $\|u\| = 0$, niin $u = 0$;

3. $\|\alpha u\| = |\alpha| \, \|u\|$ jokaiselle $\alpha \in \mathbb{R}$ ja $u \in \mathbb{R}^n$;

4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ jokaiselle $u, v \in \mathbb{R}^n$.

Lemma 3.6 (Pythagoraan lause) *Olkoot $u \in \mathbb{R}^n$ ja $v \in \mathbb{R}^n$. Tällöin u ja v ovat ortogonaalisia eli $u \cdot v = 0$, jos ja vain jos*

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 .$$

Lause 3.7 (Suunnikassääntö)

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\,\|u\|^2 + 2\,\|v\|^2 ,$$

kun $\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$.

Lemma 3.8 *Jos* $u \in \mathbb{R}^n$ *ja* $v \in \mathbb{R}^n$ *niin* $\|u\| = \|v\|$ *jos ja vain jos* $(u+v) \perp (u-v)$ *eli* $(u+v)\cdot(u-v) = 0$.

Todistus. Väite seuraa siitä, että

$$
\begin{aligned}
(u+v)\cdot(u-v) &= \|u\|^2 - u\cdot v + v\cdot u - \|v\|^2 \\
&= \|u\|^2 - \|v\|^2 .
\end{aligned}
$$

■

4 Lukujonot euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$

4.1 Jonon suppeneminen

Määritelmä 4.1 *Jono euklidisessa avaruudessa* $\mathbb{R}^n$ *on kuvaus* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$

$$f(k) = u_k = \left(u_{k,1}, u_{k,2}, ..., u_{k,n}\right),$$

kun $k \in \mathbb{N}$ *ja* $u_k = \left(u_{k,1}, u_{k,2}, ..., u_{k,n}\right) \in \mathbb{R}^n$. *Jonoa voidaan merkitä* $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ *tai* $u_1, u_2, ...$

Määritelmä 4.2 *Olkoot* $u_i \in \mathbb{R}^n$, *kun* $i \in \mathbf{N}$. *Jono* $(u_i)_{i\in\mathbf{N}}$ *suppenee kohti pistettä* $a \in \mathbb{R}^n$ *avaruudessa* $\mathbb{R}^n$, *jos jokaiselle* $\varepsilon > 0$ *on olemassa sellainen* $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, *että*

$$d(a, u_k) = \|a - u_k\| < \varepsilon$$

jokaiselle $k > m_\varepsilon$.*Tällöin merkitsemme*

$$\lim_{k\to\infty} u_k = a.$$

ja pistettä a *sanotaan jonon* (u_k) *raja-arvoksi. Jos jono ei suppene, se hajaantuu.*

Suppenevuus tarkoittaa, että jonon pisteiden u_k etäisyys pisteestä a on mielivaltaisen pieni, kun k on tarpeeksi suuri.

Merkitään koordinaatin i määräämää projektiokuvausta $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$p_i \left(u_1, u_2, ..., u_n \right) = u_i.$$

Tällöin p_i on lineaarinen, toisin sanottuna

$$p_i \left(\alpha u + \beta v \right) = \alpha p_i u + \beta p_i v$$

jokaiselle α,$\beta \in \mathbb{R}$.

Lemma 4.3 *Olkoot* $u = (u_1, u_2, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$ *ja* $v = (v_1, v_2, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, *Tällöin*

$$|p_i u| = |u_i| \leq \|u\|$$

jokaiselle $i = 1, , , , , n$. *Erityisesti*

$$|p_i u - p_i v| = |u_i - v_i| \leq d\,(u, v)\,.$$

Lisäksi

$$\|u\| \leq \sum_{i=1}^{n} |p_i u|\,.$$

Lause 4.4 *Olkoot* $u_i \in \mathbb{R}^n$*, kun* $i \in \mathbb{N}$*. Tällöin jono* $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *suppenee ja* $a = \lim_{k\to\infty} u_k$ *jos ja vain jos reaalilukujono* $(p_i u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ *suppenee ja*

$$\lim_{k\to\infty} p_i u_k = p_i a$$

jokaiselle $i = 1, ..., n$ *.*

Seuraus 4.5 *Jos jono suppenee avaruudessa* $\mathbb{R}^n$*, niin sen raja-arvo on yksikäsitteinen.*

Seuraus 4.6 *Olkoot* $u_k \in \mathbb{R}^n$*, kun* $k \in \mathbb{N}$*. Tällöin jono* $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ *suppenee jos ja vain jos jokainen sen osajono suppenee kohti samaa raja-arvoa.*

Lause 4.7 *Olkoot* $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ *ja* $(v_k)_{k\in\mathbf{N}}$ *jonoja avaruudessa* $\mathbb{R}^n$*. Jos*

$$\lim_{k\to\infty} u_k = a$$

ja

$$\lim_{k\to\infty} v_k = b,$$

niin

1. $\lim_{k\to\infty} u_k + v_k = a + b,$

2. $\lim_{k\to\infty} u_k \cdot v_k = a \cdot b,$

3. $\lim_{k\to\infty} \beta u_k = \beta a.$

Määritelmä 4.8 *Joukkoa $A \subset \mathbb{R}^n$ sanotaan rajoitetuksi, jos on olemassa sellainen reaaliluku $M > 0$,että*

$$\|a\| \leq M$$

jokaiselle $a \in A$. Jono (a_k) on rajoitettu, jos sitä vastaava joukko $\{a_k | \ k \in \mathbb{N}\}$ on rajoitettu.

Lemma 4.9 *Jos jono (a_k) supeenee avaruudessa $\mathbb{R}^n$, niin jono (a_k) on rajoitettu. Lisäksi jos $\|a_k\| \leq M$ jokaiselle $k \in \mathbb{N}$, niin jonon (a_k) raja-arvo a teteuttaa ehdon $\|a\| \leq M$.*

Lause 4.10 (Bolzano-Weierstrass) *Olkoot $a_k \in \mathbb{R}^n$. Jos $\|a_k\| \leq M$ jokaiselle $k \in \mathbb{N}$, niin jonolla (a_k) on suppeneva osajono, jonka raja-arvo a toteuttaa ehdon $\|a\| \leq M$.*

Todistus. Väite on todistettu, kun $n = 1$. Oletetan, että väite on voimassa, kun $n = m \in \mathbb{N}$.Olkoot $a_k \in \mathbb{R}^{m+1}$ ja oletetaan, että

$$\sqrt{(p_1 a_k)^2 + ... + (p_m a_k)^2 + (p_{m+1} a_k)^2} = \|a_k\| \leq M$$

jokaiselle $k \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$\sqrt{(p_1 a_k)^2 + ... + (p_m a_k)^2} \leq \sqrt{(p_1 a_k)^2 + ... + (p_m a_k)^2 + (p_{m+1} a_k)^2} \leq M.$$

Merkitään

$$b_k = (p_1 a_k, p_2 a_k, ..., p_m a_k) .$$

Induktio-oletuksen nojalla jonolla (b_k) on suppeneva osajono $\left(b_{k_i}\right)_{i \in \mathbb{N}}$. Merkitääm $b = \lim_{i \to \infty} b_{k_i}$. Koska

$$\left|p_{m+1} a_{k_i}\right| \leq \sqrt{\left(p_1 a_{k_i}\right)^2 + ... + \left(p_m a_{k_i}\right)^2 + \left(p_{m+1} a_{k_i}\right)^2} \leq M,$$

niin reaalilukujonolla $\left(p_{m+1} a_{k_j}\right)$ on suppeneva osajono $\left(p_{m+1} a_{k_{i_j}}\right)_{j \in \mathbb{N}}$. Merkitään $\lim p_{m+1} a_{k_{i_j}} = b_{m+1}$. Koska $\left(b_{k_{i_j}}\right)$ on jonon $\left(b_{k_i}\right)_{i \in \mathbb{N}}$ osajono, niin se suppenee ja $\lim_{j \to \infty} b_{k_{i_j}} = b$ sekä $\lim_{j \to \infty} p_l \left(b_{k_{i_j}}\right) = p_l b$ jokaiselle $l = 1, ..., m$. Siis

$$\lim_{j \to \infty} \left(p_1 a_{k_{i_j}}, p_2 a_{k_{i_j}}, ..., p_{m+1} a_{k_{i_j}}\right) = (b_1, ..., b_{m+1}).$$

Edellisestä lemmasta seuraa viimeinen osa väitteestä. ■

Seuraus 4.11 *Jos jono (a_k) on rajoitettu, sillä on suppeneva osajono.*

Määritelmä 4.12 *Jonoa (a_k) sanotaan Cauchyn jonoksi avaruudessa $\mathbb{R}^n$, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että*

$$\|a_t - a_s\| < \varepsilon$$

jokaiselle $t, s > m_\varepsilon$. Joukkoa $A \subset \mathbb{R}^n$ sanotaan täydelliseksi, jos sen jokainen Cauchyn jono suppenee kohti joukon A pistettä.

Lemma 4.13 *Jono (a_k) on Cauchyn jonoavaruudessa $\mathbb{R}^n$, jos ja vain jos $(p_i a_k)_{k \in \mathbb{R}^n}$ on Cauchyn jono avaruudessa $\mathbb{R}$ jokaiselle $i = 1, ..., n$.*

Lemma 4.14 *Olkoon $M > 0$. Joukko $\{u \in \mathbb{R}^n \mid \|u\| \leq M\}$ on täydellinen.*

Lemma 4.15 *Cauchyn jono avaruudessa $\mathbb{R}^n$ on rajoitettu.*

Lause 4.16 *Euklidinen avaruus $\mathbb{R}^n$ on täydellinen.*

5 Topologiaa joukossa $\mathbb{R}^n$

5.1 Avoin ja suljettu joukko

Määritelmä 5.1 *Olkoon $u \in \mathbb{R}^n$.Joukkoa*

$$B(u,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-u\| < r\}$$

sanotaan r-säteiseksi u-keskiseksi avoimeksi palloksi. Joukkoa

$$\overline{B}(u,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-u\| \leq r\}$$

sanotaan r-säteiseksi u-keskiseksi suljetuksi palloksi.

Topologian peruskäsitteet ovat seuraavat:

Määritelmä 5.2 *Olkoon* $U \subset \mathbb{R}^n$

1. *joukkoa* $U \subset \mathbb{R}^n$ *sanotaan* avoimeksi, *jos jokaiselle pisteelle* u *on olemassa avoin pallo* $B(u, r) \subset U$.

2. *Joukkoa* U *sanotaan suljetuksi, jos sen komplementtijoukko* $\mathbb{R}^n \backslash U$ *on avoin.*

3. *Piste* $u \in U$ *on joukon* $U \subset \mathbb{R}^n$ sisäpiste, *jos on olemassa avoin pallo* $B(u, r) \subset U$. *Sisäpisteiden joukkoa merkitään* $\operatorname{int} U$.

4. *Piste* $u \in \mathbb{R}^n$ *on joukon* $U \subset \mathbb{R}^n$ reunapiste,*jos jokaiselle* $r > 0$ *pätee* $B(u,r) \cap U \neq \varnothing$ *ja* $B(u,r) \setminus U \neq \varnothing$*. Joukon* A *reunapisteiden joukko merkitään* $\partial\dot{U}$

5. *Piste* $u \in \mathbf{R}^n$ *on joukon* $U \subset \mathbf{R}^n$ kasautumispiste, *jos jokaiselle* $r > 0$ *löytyy sellainen* $u_r \in U$*, että* $0 < \|u_r - u\| < r$*.*

6. *Piste* $u \in \mathbf{R}^n$ *on joukon* $U \subset \mathbf{R}^n$ erillinen piste, *jos on olemassa sellainen* $r > 0$*, että* $B(u,r) \cap U = \{u\}$.

Joukko voi olla suljettu ja avoin. Esimerkiksi $\varnothing$ on suljettu sekä avoin.

Joukkon ei tarviste olla suljettu eikä myöskään avoin. Esimerkiksi puoliavoin väli $]a, b]$.

Siitä, että joukko ei ole avoin, ei seuraa välttämättä, että joukko olisi suljettu tai päinvastoin.

Huomautus 5.3 *Joukko* $A \subset \mathbb{R}^n$ *on avoin jos ja vain jos* $A = \operatorname{int} A$*.*

Huomautus 5.4 *Piste* u *ei ole joukon* U *kasautumispiste jos ja vain jos on olemassa sellainen avoin pallo* $B(u, r)$*, että* $B(u, r) \cap U \subset \{u\}$*.*

Propositio 5.5 *Avoin pallo* $B(u, r)$ *on avoin joukko.*

Lemma 5.6 *Jos* $u \in \mathbb{R}^n$ *on joukon* $U \subset \mathbb{R}^n$ *kasautumispiste, niin jokaisessa avoimessa pallossa* $B(u, r)$ *on äärettömän monta joukon* U *pistettä. Lisäksi on olemassa sellainen jono* (u_k) *joukon* U *eri pisteitä, että* $\lim_{k \to \infty} u_k = u$*.*

Seuraus 5.7 *Äärellisellä joukolla ei ole kasautumispisteitä.*

Lause 5.8 *Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on avoin jos ja vain jos*

$$A \cap \partial A = \emptyset$$

Merkitään

$$\overline{F} = \mathsf{int}\, F \cup \partial F$$

Joukkoa $\overline{F}$ sanotaan joukon F sulkeumaksi.

6 Halkaisija

Määritelmä 6.1 *Epätyhjän joukon epätyhjän* $A \subset \mathbb{R}^n$ *halkaisija on*

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x,y) \mid x,y \in A\} = \sup_{x,y\in A} \|x-y\|.$$

Joukko on rajoitettu, jos $A = \varnothing$ *tai* $\operatorname{diam}(A) < \infty$.

Huomautus 6.2

$$0 \leq \operatorname{diam}(A) \leq \infty$$

ja tyhjällä joukolla ei ole halkaisijaa.

Lemma 6.3 *Jos* $A \subset \mathbb{R}^n$ *on rajoitettu, niin on olemassa sellainen pallo* $B_r(0)$ *että* $A \subset \overline{B(0,r)}$ *eli* $\|x\| \leq r$ *jokaiselle* $x \in A$.

7 Vektorifunktio

Määritelmä 7.1 *Olkoon* $A \subset \mathbb{R}^n$ *ja* $n, p \in \mathbb{N}$. *Funktio* $f : A \to \mathbb{R}^p$ *on*

1. *vektoriarvoinen funktio, jos* $p \geq 2$,
2. *reaalifunktio, jos* $p = 1$.

Esimerkki. Tarkastellaan kuvausta $g(x_1, x_2) = \sqrt{9 - x_1^2 - x_2^2}$

Funktion g graafi on joukko

$$\left\{ (x_1, x_2, x_3) \ | x_1, x_2 \in D,\ x_3 = \sqrt{9 - x_1^2 - x_2^2} \right\}$$

Kuvauksen määrittelyjoukko on

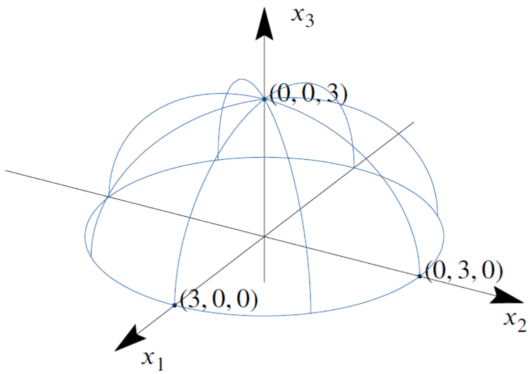
$$D = \{(x_1, x_2) \mid 9 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0\} = \{x_1^2 + x_2^2 \leq 9\} = B^2(0, 3).$$

Kuvajoukko on

$$\left\{ x_3 \mid x_3 = \sqrt{9 - x_1^2 - x_2^2}\ ;\ (x_1, x_2) \in D \right\}.$$

Siis kuvauksen arvojoukko on $[0, 3]$.

$$\text{Graafi} = \left\{ (x_1, x_2, \sqrt{9 - x_1^2 - x_2^2}) \mid (x_1, x_2) \in D \right\}.$$



Kuva 6: Esimerkin 1.2.1 graafi $= \left\{ (x_1, x_2, \sqrt{9 - x_1^2 - x_2^2}) \mid (x_1, x_2) \in D \right\}$.

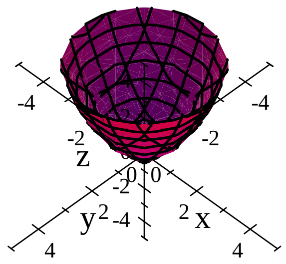
Määritelmä 7.2 *Olkoon* $A \subset \mathbb{R}^2$*. Jos* $f : A \to \mathbb{R}$ *on kuvaus, niin sen graafi on joukko*

$$\{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2) \in A,\ x_3 = f(x_1, x_2)\}.$$

Esimerkki 7.3 $f(u) = \|u\|^2, u \in \mathbb{R}^2$.*Funktion graafi on*

$$\left\{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_3 = x_1^2 + x_2^2\right\}$$

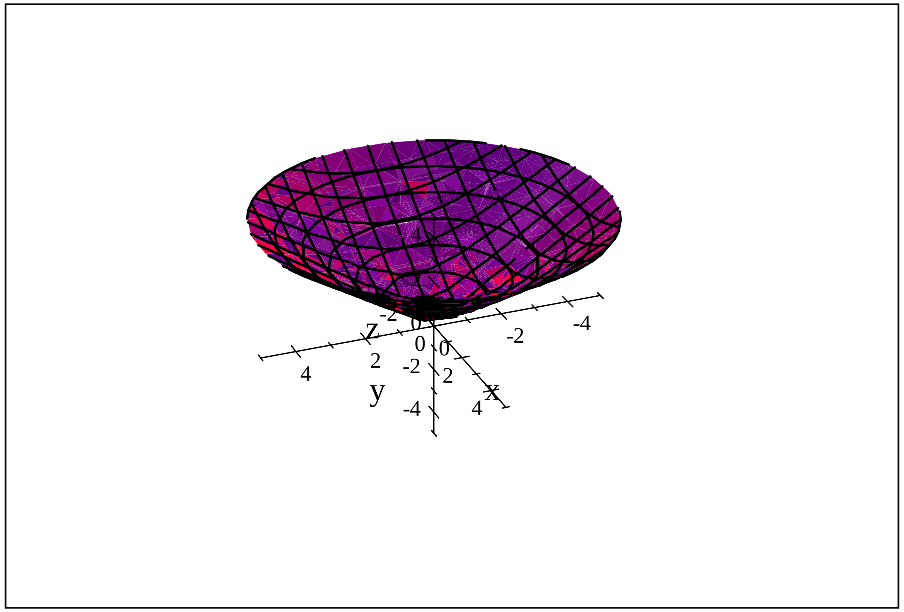
Esimerkki 7.4 $z = x^2 + y^2$



Esimerkki 7.5 $f(u) = \|u\|, u \in \mathbb{R}^2$.*Funktion graafi on*

$$\left\{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right\}.$$

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$



z
y
x

8 Tasa-arvojoukko

Määritelmä 8.1 *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $f : A \to \mathbb{R}$ reaalifunktio. Funktion f tasa-arvojoukko on*

$$S_r(f) = \{x \in A \mid f(x) = r\}.$$

Esimerkki 8.2 *Funktion $f(u) = \|u\|, u \in \mathbb{R}^2$ tasa-arvojoukko on*

$$\left\{u \in \mathbb{R}^2 \mid \|u\| = r\right\}.$$

Siis r-säteinen origokeskinen pallon kehä.

8.1 Funktion raja-arvo

Määritelmä 8.3 *Olkoon* $D \subset \mathbb{R}^n$ *ja* a *joukon* D *kasautumispiste. Funktiolla* $f : D \to \mathbb{R}$ *on raja-arvo* $b \in \mathbb{R}$ *pisteessä* a*,jos jokaista* $\varepsilon > 0$ *kohti on olemassa sellainen* $\delta_{a,\varepsilon} = \delta > 0$*, että*

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

jokaiselle x*, joka toteuttaa ehdon* $0 < \|x - a\| < \delta$ *ja* $x \in D$*.Tällöin merkitään*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Lause 8.4 *Jos raja-arvo on olemassa, se on yksikäsitteinen.*

Lause 8.5 *Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$ ja a joukon D kasautumispiste. Funktiolla $f : D \to \mathbb{R}$ on raja-arvo $b \in \mathbb{R}$ pisteessä a, jos ja vain jos jokaiselle joukon $D \setminus \{a\}$ pistettä a kohti suppenevalle jonolle $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$, (ts. $a_k \in D \setminus \{a_k\}$ ja $\lim_{k\to\infty} a_k = a$ pätee*

$$\lim_{k\to\infty} f(a_k) = b.$$

Todistus. Oletetaan, että jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - b| < \varepsilon,$$

kun $0 < \|x - a\| < \delta$. ja $x \in D \setminus \{a\}$. Olkoon $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ siten, että $\lim_{k\to\infty} a_k = a$. ja $a_k \in D$. Koska $\lim_{k\to\infty} a_k = a$, on olemassa m_δ siten, että

$$\|a_k - a\| < \delta,$$

kun $k > m_\delta$. Tällöin jokaiselle $k > m_\delta$ pätee, että

$$|f(a_k) - b| < \varepsilon.$$

Siis

$$\lim_{k\to\infty} f\left(a_k\right) = b.$$

Oletetaan, että $\lim_{k\to\infty} f\left(a_k\right) = b$ jokaiselle jonolle $\left(a_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$, missä $a_k \in D \setminus \{x\}$ ja $\lim a_k = a$. Tehdään vastaoletus, että $\lim_{x\to a} f(x) \neq b$ eli $\lim_{x\to a} f(x)$ ei ole olemassa tai $\lim_{x\to a} f(x) \neq b$. Tällöin on olemassa sellainen $\varepsilon > 0$, että kaikille $\delta > 0$ löytyy $a_{\frac{1}{\delta}} \in D$ siten, että $0 < \left\| a_{\frac{1}{\delta}} - a \right\| < \delta$, mutta

$$\left| f(a_{\frac{1}{\delta}}) - b \right| \geq \varepsilon.$$

Näin saadulle jonolle $\left(a_n\right)_{k\in\mathbb{N}}$ pätee

$$\lim_{k\to\infty} a_k = a.$$

Toisaalta $\|f(a_k) - b\| > \varepsilon$ jokaiselle $k \in \mathbb{N}$, joten

$$\lim_{k \to \infty} f(a_k) \neq b,$$

missä on ristiriita. ■

Lause 8.6 *Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$ ja a joukon D kasautumispiste. Jos $f : D \to \mathbb{R}$ sekä $g : D \to \mathbb{R}$ ovat funktioita. ja*

$$\lim_{x \to a} f(x) = c \text{ ja } \lim_{x \to a} g(x) = d,$$

niin

(a) $\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = c + d$,

(b) $\lim_{x \to a} f(x)\, g(x) = ab,$

(c) $\lim_{x \to a} \beta f(x) = \beta a$, *jokaiselle* $\beta \in \mathbb{R}$.

Esimerkki 8.7 *Tutki funktion*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{kun } (x, y) \neq 0, \end{cases}$$

raja-arvoa origossa $(0, 0)$.

Esimerkki 8.8 *Laskuharjoitustehtävä: Selvitä, onko raja-arvo*

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\sin\left(x^2 + y^2\right)}{x^2 + y^2}$$

olemassa

Esimerkki 8.9 *Selvitä, onko raja-arvo*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$$

olemassa?

8.2 Funktion jatkuvuus

Määritelmä 8.10 *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$. Funktio $f : U \to \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä $a \in U$, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta_{a,\varepsilon} > 0$,että*

$$|f(u) - f(a)| < \varepsilon$$

jokaiselle $u \in B(a,\delta) \cap U$, *toisin sanottuna aina kun* $\|u-a\| < \delta$ *ja* $x \in U$. *Funktiota* f *sanotaan jatkuvaksi joukossa* U, *jos se on jatkuva jokaisessa pisteessä* $a \in U$.

Lause 8.11 *Olkoon* $U \subset \mathbb{R}^n$. *Jos funktio* $f : U \to \mathbb{R}$ *on jatkuva pisteessä* $a \in U$, *niin on olemassa sellainen ympäristö* $B(a,\delta)$, *että* f *on rajoitetettu joukossa* $B(a,\delta) \cap U$, *ts. on olemassa sellainen* $M > 0$, *että*

$$|f(u)| \leq M$$

jokaiselle $u \in B(a,\delta) \cap U$.

Lause 8.12 *Olkoon* $U \subset \mathbb{R}^n$. *Funktio* $f : U \to \mathbb{R}$ *on jatkuva pisteessä* $a \in U$, *jos jokaiselle joukon* U *jonolle* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, *joka suppenee pistettä* a *kohti, pätee*

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(a).$$

Esimerkki 8.13 *Funktio $f(x) = 2x_1$ on jatkuva joukossa $\mathbb{R}^n$.*

$$\lim_{y \to x} f(x) = \lim_{y \to x} 2y_1 = 2 \lim_{y \to x} y = 2x_1.$$

Olkoon $\varepsilon > 0$ ja valitaan, että $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Tällöin

$$\|f(y) - 2x_1\| = 2\,|y_1 - x_1| < \varepsilon$$

aina, kun $|y_1 - x_1| \leq \|y - x\| < \delta$.

Esimerkki 8.14 *Funktio*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{kun } (x, y) \neq 0, \\ 0, & \text{kun } (x, y) = 0. \end{cases}$$

ei ole jatkuva pisteessä $(x, y) = 0$. Ohje tarkastele suoria $x = ky$ ja $y = kx$.

Lause 8.15 *Olkoon* $U \subset \mathbb{R}^n$*. Jos funktiot* $f : U \to \mathbb{R}$ *ja* $g : U \to \mathbb{R}$ *ovat jatkuvia pisteessä* $a \in U$*, niin funktiot* $\alpha f + \beta g$ *ovat jatkuvia pisteessä* a *jokaiselle* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*.*

Lause 8.16 *Olkoon* $U \subset \mathbb{R}^n$*. Jos funktiot* $f : U \to \mathbb{R}$ *ja* $g : U \to \mathbb{R}$ *ovat jatkuvia pisteessä* $a \in U$ *, niin* fg *on jatkuva ja* $\frac{f}{g}$ *on jatkuva, mikäli* $g(a) \neq 0$*.*

Seuraus 8.17 *Polynomifunktio*

$$f(x_1, .., x_n) = \sum_{0 \leq i_1 + ... + i_n \leq m} a(i_1, i_2, .., i_n)\, x_1^{i_1} ... x_n^{i_n},\ a(i_1, i_2, .., i_n) \in \mathbb{R}$$

on jatkuva funktio.

9 Reaaliarvoisen funktion osittaisderivaatat

9.1 Osittaisderivaaatat

Määritelmä 9.1 *Olkoon* $U \subset \mathbb{R}^2$ *avoin,* $f : U \to \mathbb{R}$ *ja* $(a, b) \in U$*. Funktiolla* f *on osittaisderivaatta muuttujan* x *suhteen pisteessä* (a, b)*, jos on olemassa raja-arvo*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}.$$

Tätä raja-arvoa merkitsemme $f_x(a, b)$ *tai* $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ *tai* $D_1 f(a, b)$*. Funktiolla* f *on osittaisderivaatta muuttujan* y *suhteen pisteessä* (a, b)*, jos on olemassa raja-arvo*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}.$$

Tätä raja-arvoa merkitsemme $f_y(a,b)$ *tai* $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ *tai* $D_2 f(a,b)$.

Huomautus 9.2 *Olkoon* $U \subset \mathbb{R}^2$ *avoin,* $f : U \to \mathbb{R}$ *ja* $(a,b) \in U$. *Jos merkitään*

$$g(x) = f(x,b)$$

niin

$$g'(a) = f_x(a,b)$$

mikäli $g'(a)$ *on olemassa. Samoin jos*

$$h(y) = f(a,y)$$

niin

$$h'(b) = f_y(a,b)$$

mikäli $h'(b)$ *on olemassa. Siis* $f_x(a,b)$ *on käyrän* $g(x) = f(x,b)$ *tangentin kulmakerroin. Vastaavasti* $f_y(a,b)$*on käyrän* $h(y)$ *tangentin kulmakerroin.*

Esimerkki 9.3 *Olkoon* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x = y = 0 \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq 0 \end{cases},$$

Osoita, että funktiolla on kaikki osoittaiderivaatat kaikkialla, mutta funktio ei ole jatkuva origossa.

Määritelmä 9.4 *Olkoon* $U \subset \mathbb{R}^2$ *avoin,* $f : U \to \mathbb{R}$ *ja* $(a,b) \in U$*. Jos funktiolla* f

on osittaisderivaattat muuttujien x ja y suhteen pisteessä (a,b), niin

$$\begin{aligned}
f_{xx}(a,b) &= \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b),\\
f_{yx}(a,b) &= \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b),\\
f_{xy}(a,b) &= \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b),\\
f_{yy}(a,b) &= \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)
\end{aligned}$$

mikäli nämä ovat olemassa.

Esimerkki 9.5 *Osoita, että funktio*

$$f(x,y) = e^x \sin y$$

on harmoninen eli toteuttaa yhtälön

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0.$$

Lause 9.6 (Clairautin lause.) *Olkoon* $U \subset \mathbb{R}^n$ *avoin ja* $f : U \to \mathbb{R}$. *Jos osittaisderivaatat* $f_{x_k x_r}$ *ja* $f_{x_r x_k}$ *ovat olemassa ja jatkuvia jossain pallossa* $B_r a \subset U$ *, niin*

$$f_{x_k x_r} = f_{x_r x_k}.$$

10 Osittaisderivaatat useamman muuttujan funktiolle

Määritelmä 10.1 *Olkoon* $U \subset \mathbb{R}^n$ *avoin,* $f : U \to \mathbb{R}$ *ja* $u \in U$. *Merkitään*

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1, 0, ..., 0), \\ \mathbf{e}_2 &= (0, 1, ..., 0), \\ &\vdots \\ \mathbf{e}_n &= (0, 0, ..., 1). \end{aligned}$$

Funktiolla f *on osittaisderivaatta muuttujan* x_i *suhteen pisteessä* u, *jos on olemassa raja-arvo*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(u + h\mathbf{e}_i) - f(u)}{h}.$$

Tätä raja-arvoa merkitsemme $f_{x_i}(u)$ *tai* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(u)$ *tai* $D_i f(u)$ *tai* $\partial_i(u)$.

Esimerkki 10.2 *Kun* $n = 2$, *niin*

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1, 0), \\ \mathbf{e}_2 &= (0, 1). \end{aligned}$$

Merkitään $u = (a, b)$. *Olkoon* $i = 1$. *Tällöin osittaisderivaatta muuttujan* x_1 *suhteen on raja-arvo*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(u + h\mathbf{e}_i) - f(u)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h},$$

mikäli se on olemassa

Esimerkki 10.3 *Olkoon* $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1 x_3 + x_2^3 x_3$

Esimerkki 10.4 *Funktio* $f(x,t) = \sin(x - at)$, $a > 0$. *Osoita, että* f *toteuttaa aaltoyhtälön*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

11 Kahden muuttujan funktion osittaisderivaatojen geometrinen tulkinta

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$. Jos $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ on kuvaus, niin sen graafi on joukko

$$S = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in A,\ z = f(x,y)\}.$$

Jos $f(a,b)=c$, niin piste (a,b,c) on pinnalla S.

Kun $y=b$ on vakio, tarkastelemme pinnan leikkauskäyrää $(x,b,f(x,b))$.

Kun $x=a$ on vakio, tarkastelemme pinnan leikkauskäyrää $(a,y,f(a,y))$.

Tälläin kun merkitsemme $g(x)=f(x,b)$, niin $g'(a)=f_x(a,b)$. Siis funktion $g(x)$ kuvaajan tangentin kulmakerroin on leikkauskäyrän $(x,b,f(x,b))$ tangentin kulmakerroin.

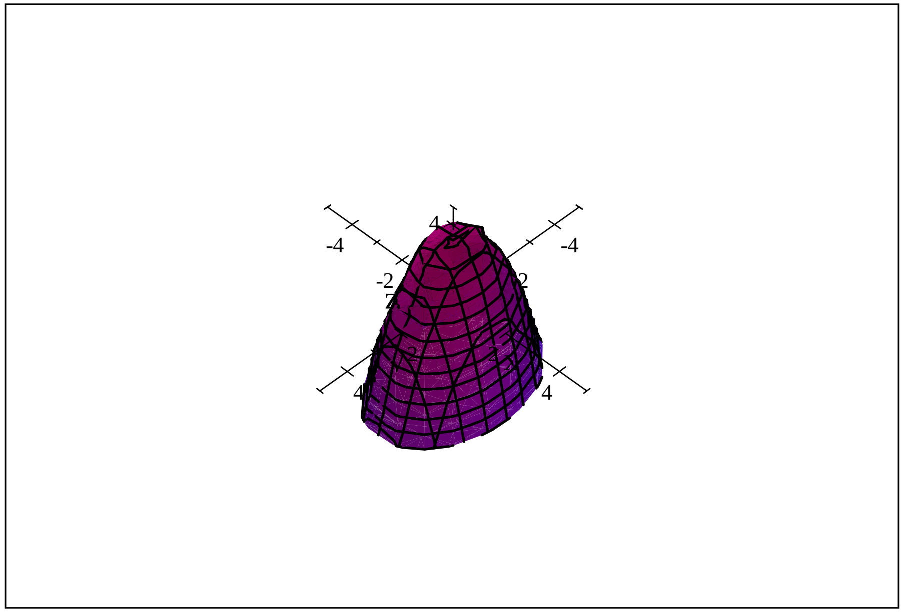
Vastaavasti kun merkitsemme $h(y)=f(a,y)$, niin $h'(b)=f_y(a,b)$. Siis funktion $h(y)$ kuvaajan tangentin kulmakerroin on leikkauskäyrän $(a,y,f(a,y))$ tangentin kulmakerroin.

Esimerkki 11.1 *Olkoon*

$$f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2.$$

Laske $f_x(1,1)$ *ja* $f_y(1,1)$.

$z = 4 - x^2 - 2y^2$



4
-4
-4
-2
2
4
4

12 Suunnattu derivaatta.

Määritelmä 12.1 *Olkoon* $U \subset \mathbb{R}^n$ *avoin,* $u \in \mathbb{R}^n$ *ja* $e \in \mathbb{R}^n$ *sekä* $\|e\| = 1$*. Funktion* $f : U \to \mathbb{R}^m$ *suunnattu derivaatta suuntaan* e *pisteessä* $u \in U$ *on raja-arvo*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(u + he) - f(x)}{h}.$$

mikäli se on olemassa. Funktion f *suunnattua derivaattaa suuntaan* e *pisteessä* u *merkitään*

$$D_e f(u).$$

Huom.

$$D_{e_i} f(u) = D_i f(x) = f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Esimerkki 12.2 *Olkoon* $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ *ja* $e = \frac{e_1 + e_2}{2}$.

13 Tangenttitaso

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ ja $f : A \to \mathbb{R}$ on kuvaus, jonka graafi on joukko

$$S = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in A,\ z = f(x, y)\}$$

ja jolla on jatkuvat osittaisderivaatat.

Lause 13.1 *Pinnan* S *tangenttitason yhtälö pisteessä* $(x_0, y_0, z_0) \in S$ *on*

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = z - z_0,$$

missä

$$\begin{aligned} a &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ b &= \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ z_0 &= f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Määritelmä 13.2 *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $u \in U$, niin funktion $f : U \to \mathbb{R}$ gradientti pisteessä x_0 on*

$$\begin{aligned} \nabla f(u) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(u), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(u)\right) \\ &= (D_1 f(u), ..., D_n(u)). \end{aligned}$$

Seuraus 13.3 *Olkoon* $U \subset \mathbb{R}^n$ *avoin,* $u \in U$ *ja* $f : U \to \mathbb{R}$ *funktio, jolla on jatkuvat osittaisderivaatat. Pinnan* $S = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in A,\ z = f(x, y)\}$ *tangenttitason normaali pisteessä* u *on*

$$\nabla f(u) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(u), \frac{\partial f}{\partial y}(u)\right)$$

Esimerkki 13.4 *Etsi tangenttitaso elliptiselle paraboloidille pisteessä* $(1, 1, 3)$ *Paraboloidin määrää yhtälö* $z = 2x^2 + y^2$.

14 Kuvauksen aproksimointi

Huomautus 14.1 *Olkoon* $U \subset \mathbb{R}^2$ *avoin,* $u_0 \in U$ *ja* $f : U \to \mathbb{R}$ *jatkuva funktio, jolla on jatkuvat osittaisderivaatat. Tällöin kuvausta* f *voidaan approksimoida seuraavalla affiinilla kuvauksella*

$$f(u) \approx f(u_0) + \nabla f(u_0) \cdot (u - u_0).$$

Nimittäin

$$\|f(u) - f(u_0) + \nabla f(u_0) \cdot (u - u_0)\| \leq \|f(u) - f(u_0)\| + \|\nabla f(u_0)\| \cdot \|u - u_0\|.$$

Huomautus 14.2 *Olkoon* $U \subset \mathbb{R}^2$ *avoin,* $u_0 = (x_0, y_0) \in U$ *ja* $f : U \to \mathbb{R}$ *funktio. Funktion* f *graafia*

$$S = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in U,\, z = f(x, y)\}$$

voidaan approksimoida tangenttitasolla

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot ((x, y) - (x_0, y_0)) = z - z_0$$

Esimerkki 14.3 *Olkoon* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sin x_1 \cos x_2$$

laske gradientti.

Esimerkki 14.4 *Laske funktion*

$$f(x) = \|x\|^2$$

gradientti.

15 Lineaarikuvauksista

Määritelmä 15.1 *Kuvausta $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sanotaan lineaarikuvaukseksi, jos*

1. $T(u+v) = Tu + Tv$
2. $T(ru) = rTu$

jokaiselle $u, v \in \mathbb{R}^n$ *ja* $r \in \mathbb{R}$.

Lause 15.2 *Kuvausta* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *on lineaarinen jos ja vain jos*

$$T\left(ru + sv\right) = rTu + sTv$$

jokaiselle $r, s \in \mathbb{R}$ *ja* $u, v \in \mathbb{R}^n$.

Lause 15.3 *Kerrataan lineaarikuvauksen matriisi*

Lause 15.4 *Olkoon* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. *Tällöin on olemassa* $m \times n$ *matriisi* A, *joka toteuttaa ehdon*

$$T\left(h\right) = \left(Ah^T\right)^T.$$

Lisäksi matriisin A esitys pystyrivimuodossa on

$$A = \left[T\left(\mathbf{e}_1\right)^T \ldots T\left(\mathbf{e}_n\right)^T \right],$$

missä $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ standardi kanta.

Seuraus 15.5 *Jokaista lineaarikuvausta $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vastaa sellainen $a \in \mathbb{R}^n$, että*

$$Tx = a \cdot x.$$

Esimerkki 15.6 *Olkoon*

$$Tx = x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 3x_5$$

Määritelmä 15.7 *Kuvausta $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sanotaan affiinikuvaukseksi, jos on olemassa sellainen lineaarlikuvaus $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ja $a \in \mathbb{R}^n$,että*

$$Sx = Tx + a.$$

16 Derivaatan määritelmä

Määritelmä 16.1 *Olkoon* $E \subset \mathbb{R}^n$ *avoin,* $f : E \to \mathbb{R}$ *ja* $x \in E$*.Funktiota* f *sanotaan differentioituvaksi pisteessä* $x \in E$*, jos on olemassa sellainen lineaarinen kuvaus* $T_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, että*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - T_x(h)}{\|h\|} = 0.$$

Tällöin lineaarikuvausta T_x *sanotaan funktion* f *derivaataksi pisteessä* x*. Funktion derivaattaa pisteessä* x *merkitään* $Df(x)$ *tai* $f'(x)$*.*

Huom. Funktio $f : E \to \mathbb{R}$ on differentioituva pisteessä $x \in E$, jos ja vain jos on olemassa lineaarinen kuvaus $T_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ja pisteen nolla jossain ympäristössä määritelty funktio $\varepsilon(h)$, jotka toteuttavat ehdot

$$f(x+h) - f(x) = T_x(h) + \|h\| \varepsilon(h)$$

ja

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Lause 16.2 *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ avoin, $f : E \to \mathbb{R}^m$ ja $x \in E$. Jos f on differentioituva pisteessä x, niin kuvaus T_x on yksikäsitteinen.*

Todistus. Oletetaan, ettäjossain ympäristössä määritellyt funktiot $\varepsilon(h)$ ja $\varepsilon^*(h)$ sekä lineaarikuvaukset T_x ja T_x^* toteuttavat ehdot, jotka toteuttavat ehdot

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= T_x(h) + \|h\| \varepsilon(h) \\ f(x+h) - f(x) &= T_x^*(h) + \|h\| \varepsilon^*(h) \\ \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) &= 0 = \lim_{h \to 0} \varepsilon^*(h) = 0. \end{aligned}$$

jossain pisteen nolla jossain ympäristössä $B_r(0)$. Tällöin

$$T_x(h) - T_x^*(h) = \|h\| (\varepsilon^*(h) - \varepsilon(h))$$

eli

$$\frac{T_x(h) - T_x^*(h)}{\|h\|} = \varepsilon^*(h) - \varepsilon(h)$$

jokaiselle $h \in B_r(0)$. Olkoon $h_0 \in B_r(0) \setminus \{0\}$ kiinteä. Tällöin $\alpha h \in B_r(0)$, kun $\alpha \in [0,1]$. Siis

$$\varepsilon(\alpha h_0) + \varepsilon^*(\alpha h_0) = \frac{T_x(\alpha h_0) - T_x^*(\alpha h_0)}{\|\alpha h_0\|} = \frac{T_x(h_0) - T_x^*(h_0)}{\|h_0\|}.$$

Kun $\varepsilon \longrightarrow 0$, saamme

$$\frac{T_x(h_0) - T_x^*(h_0)}{\|h_0\|} = \lim_{\alpha \longrightarrow 0} \varepsilon(\alpha h_0) + \varepsilon^*(\alpha h_0) = 0.$$

Siis

$$T_x(h_0) - T_x^*(h_0) = 0$$

jokaiselle $h_0 \in B_r(0)$. Koska $r\frac{h}{2\|h\|} \in B_r(0)$ jokaiselle $h \in \mathbb{R}^n$, niin $T_x = T_x^*$. ■

Lause 16.3 *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ avoin, $f : E \to \mathbb{R}$ ja $x \in E$. Jos f on differentioituva pisteessä x, niin f on jatkuva pisteessä x.*

Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ avoin, $f : E \to \mathbb{R}$ ja $x \in E$.Jos f on differentioituva, niin sillä on osittaisderivaatat kaikkien koordinaattien x_j suhteen ja

$$f'(x)(h) = h_1 D_1 f(x) + ... + h_n D_n f(x) = \nabla f(x) \cdot h.$$

Esimerkki 16.4 *Lineaarikuvauksen* $T:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, *niin*

$$T(x+h) - T(x) = Tx + Th - Tx = Th.$$

Siis funktion f *derivaatta on*

$$f'(x) = T$$

ja $\varepsilon(h) = 0$

Esimerkki 16.5 *Funktiolla voi olla osittaisderivaatat olemassa, mutta funktio ei ole differentioituva*

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{kun } x=0 \text{ tai } y=0 \\ 1 & \text{muuten} \end{cases}.$$

Lause 16.6 *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Jos funktiolla $f : U \to \mathbb{R}$ on jatkuvat osittaisderivaatat osittaisderivaatat joukossa U, niin f on differentioituva.*

17 Derivoimiskaavoja

Lause 17.1 *Jos $f, g : G \to \mathbb{R}, G \subset \mathbb{R}^n$ avoin, ovat differentioituvia pisteessä $x_0 \in G$, niin funktio*

$$f + g$$

on differentioituva pisteessä x_0 ja

$$D(f+g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0)$$

eli

$$D\,(f+g)\,(x_0)\,h = Df\,(x_0)\,h + Dg\,(x_0)\,h.$$

Lause 17.2 *Jos* $G \subset \mathbb{R}^n$ *avoin ja* $f, g : G \to \mathbb{R},$*, ovat differentioituvia pisteessä* $x_0 \in G$*, niin funktio*

$$fg$$

on differentioituva pisteessä x_0 *ja*

$$D\,(fg)\,(x_0) = Df\,(x_0)\,g\,(x_0) + f\,(x_0)\,Dg\,(x_0)$$

eli

$$D\,(fg)\,(x_0)\,h = g\,(x_0)\,Df\,(x_0)\,h + f\,(x_0)\,Dg\,(x_0)\,h$$

Seuraus 17.3 *Jos $G \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $f : G \to \mathbb{R}$ on t differentioituva pisteessä $x_0 \in G$, niin funktio*

$$\alpha f$$

on differentioituva pisteessä x_0 jokaiselle $\alpha \in \mathbb{R}$ ja

$$D\left(\alpha f\right)\left(x_0\right) = \alpha Df\left(x_0\right)$$

eli

$$D\left(\alpha f\right)\left(x_0\right)h = \alpha Df\left(x_0\right)h.$$

Lause 17.4 *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Jos $f : U \to \mathbb{R}$ on differentioituva pisteessä $x \in U$, niin funktiolla f on olemassa pisteessä x suunnatut derivaatat jokaiseen $e \in \mathbb{R}^n$ suuntaan ja $D_u f\left(x\right) = \nabla f\left(x\right) \cdot e$.*

Määritelmä 17.5 *Olkoon* $E \subset \mathbb{R}^n$ *avoin,* $f : E \to \mathbb{R}^m$ *ja* $x \in E$*.Funktiota* $f = (f_1, ..., f_m)$ *sanotaan differentioituvaksi pisteessä* $x \in E$*, jos jon olemassa sellainen lineaarinen kuvaus* $T_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*, että*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - T_x(h)}{\|h\|} = 0.$$

Tällöin lineaarikuvausta T_x *sanotaan funktion* f *derivaataksi pisteessä* x*. Funktion derivaattaa pisteessä* x *merkitään* $Df(x)$ *tai* $f'(x)$*.*

Seuraus 17.6 *Olkoon* $E \subset \mathbb{R}^n$ *avoin,* $f : E \to \mathbb{R}^m$ *ja* $x \in E$*.Funktio* $f = (f_1, ..., f_m)$ *on differentioituva pisteessä* $x \in E$*, jos ja vain jos jokainen koordinaattikuvaus* f_i *on differentioituva. Jos* f *on differentioituva, niin*

$$Df(x) = (Df_1(x), ..., Df_m(x))$$

ja lineaarikuvauksen $Df(x) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *matriisi on*

$$\begin{bmatrix} Df_1(x) \\ \vdots \\ Df_m(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f_1(x) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x) \end{bmatrix}.$$

Lause 17.7 *Olkoot* $U \subset \mathbb{R}^n$ *ja* $V \subset \mathbb{R}^m$ *avoimia. Jos* $f : U \longrightarrow V$ *on differentioituva pisteessä* $x_0 \in U$ *ja* $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^s$ *on differentioituva pisteessä* $f(x_0) \in V$*, niin funktio* $g \circ f$ *on differentioituva pisteessä* x_0 *ja*

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0)$$

Siis lineaarikuvuvauksen $D\,(g \circ f)\,(x_0)$ matriisi on

$$\begin{bmatrix} Dg_1\,(f\,(x_0)) \\ \vdots \\ Dg_s\,(f\,(x_0)) \end{bmatrix}_{s \times m} \begin{bmatrix} Df_1\,(x) \\ \vdots \\ Df_m\,(x) \end{bmatrix}_{m \times n}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}\,(f\,(x_0)) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m}\,(f\,(x_0)) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial g_s}{\partial x_1}\,(f\,(x_0)) & \cdots & \frac{\partial g_s}{\partial x_m}\,(f\,(x_0)) \end{bmatrix}_{s \times m} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\,(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\,(x_0) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}\,(f\,(x_0)) & \cdots & \frac{\partial f_s}{\partial x_n}\,(x_0) \end{bmatrix}_{m \times n}.$$

Seuraus 17.8 *Olkoot $U \subset \mathbb{R}^n$ ja $V \subset \mathbb{R}$ avoimia. Jos $f : U \to V$ on differentioituva pisteessä $x_0 \in U$ ja $g : V \to \mathbb{R}$ on differentioituva pisteessä $f\,(x_0) \in V$,* *niin funktio* $g \circ f$ *on differentioituva pisteessä* x_0 *ja*

$$\begin{aligned} D(g \circ f)(x_0) &= Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0) = g'(f(x_0))\, Df(x_0) \\ &= g'(f(x_0))\, \nabla f(x_0) = g'(f(x_0)) \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right) \end{aligned}$$

ja funktion $g \circ f$ *derivaatan matriisi on*

$$g'(f(x_0)) \left[\ \tfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \dots \tfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \ \right]$$

Lause 17.9 (Ketjusääntö I) *Olkoot* $U \subset \mathbb{R}$ *ja* $V \subset \mathbb{R}^n$ *avoimia. Jos funktio* $f : U \to V$

$$f(t) = (\mathbf{x}_1(t), ..., \mathbf{x}_n(t)),$$

missä $\mathbf{x}_i : U \to \mathbf{R}$, *on differentioituva pisteessä* $x_0 \in U$ *ja* $g : V \to \mathbb{R}$ *on differentioituva pisteessä* $f(x_0) \in V$, *niin funktio* $g \circ f$ *on differentioituva pisteessä*

t_0 *ja*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\left(g\circ f\right)}{\partial t} &= \frac{\partial g}{\partial x_1}\frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial t}+\frac{\partial g}{\partial x_2}\frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial t}+...+\frac{\partial g}{\partial x_n}\frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial t} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} = \left(\nabla g\right)\left(f\left(t_0\right)\right)\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial t}\left(t_0\right),...,\frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial t}\left(t_0\right)\right).
\end{aligned}$$

Esimerkki 17.10 *Okoon* $g\left(x,y\right)=x^2y+3xy^4$ *ja* $f\left(t\right)=\left(\sin 2t,\cos t\right)$. *Laske* $\frac{\partial(g\circ f)}{\partial t}\left(t\right)$. *Laske* $\frac{\partial(g\circ f)}{\partial t}\left(0\right)$.

$$\begin{aligned}
g\circ f\left(t\right) &= \sin^2\left(2t\right)\cos t+3\sin 2t\cos^4 t \\
\left(g\circ f\right)'\left(t\right) &= 4\sin\left(2t\right)\cos\left(2t\right)\cos t-\sin^2\left(2t\right)\sin t+6\cos\left(2t\right)\cos^4 t \\
&\quad -12\sin 2t\cos^3 t\sin t
\end{aligned}$$

Ketjusäännön avulla

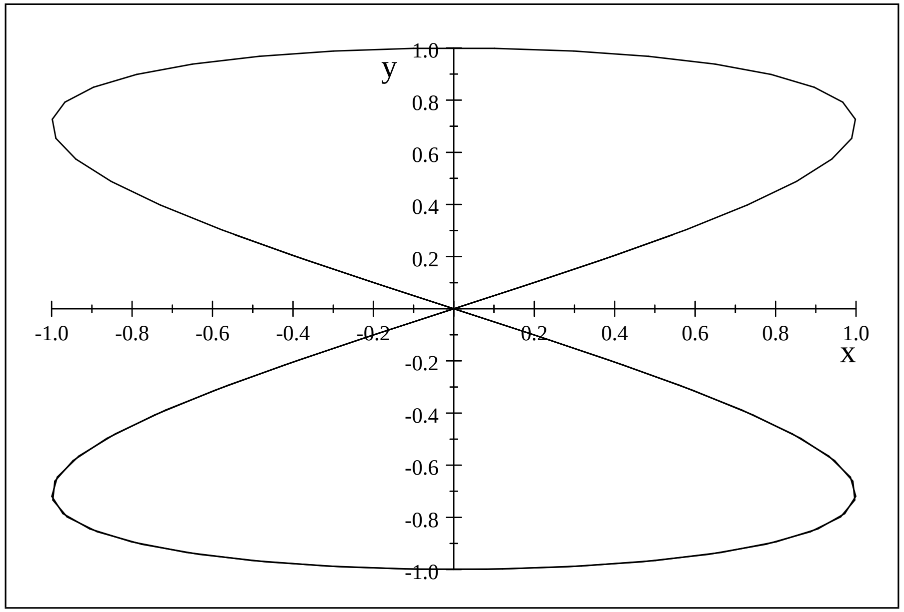
$$\begin{aligned}
\frac{\partial g \circ f(t)}{\partial t} &= \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} \\
&= \frac{\partial g}{\partial x}(f(t))\frac{\partial \sin \mathbf{2t}}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial y}(f(t))\frac{\partial \cos \mathbf{t}}{\partial t} \\
&= 2\cos 2t\left[2xy + 3y^4\right]_{x=\sin 2t, y=\cos t} - \sin t\left[x^2 + 12xy^3\right]_{x=\sin 2t, y=\cos t} \\
&= 4\cos 2t \sin 2t \cos t + 6\cos 2t \cos^4 t - \sin t \sin^2 2t - 12 \sin t \sin 2t \cos^3 t.
\end{aligned}$$

Siis

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial t}(0) = 6.$$

Huomautus 17.11 *Edellisen esimerkin derivaatta voidaan tulkita funktion* $g(x, y)$ *muutosnopeudeksi muuttujan* t

suhteen, kun (x, y)*-piste kulkee käyrällä* $f(t) = (\sin 2t, \cos t)$



.

Olkoot $U \subset \mathbb{R}^n$ ja $V \subset \mathbb{R}^n$ avoimia. Jos funktio $f : V \to U$

$$f(x) = (\mathbf{u}_1(x), ..., \mathbf{u}_n(x)),$$

on differentioituva pisteessä $x_0 \in V$, $g : U \to \mathbf{R}$, on differentioituva pisteessä $f(x_0) \in U$, niin funktio $g \circ f$ on differentioituva pisteessä x_0 ja

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0) = (h_1(x_0), ..., h_n(x_0))$$

missä

$$\begin{aligned} h_i(x_0) &= \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i}(x_0) \\ &= \frac{\partial g}{\partial u_1}(f(x_0)) \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x_i}(x_0) + \frac{\partial g}{\partial u_2}(f(x_0)) \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial x_i}(x_0) + ... + \frac{\partial g}{\partial u_n}(f(x_0)) \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial x_i}(x_0 \end{aligned}$$

Esimerkki 17.12 *Olkoon* $g(u, v) = e^u \sin v$ *ja* $f(x, y) = \left(xy^2, x^2y\right)$. *Laske* $D(g \circ f)(x, y)$.

Lasketaan $g \circ f$

$$g \circ f\,(x, y) = e^{xy^2} \sin\left(x^2 y\right)$$

Siis

$$\begin{aligned} D\,(g \circ f)\,(x, y)\,h &= \left(y^2 e^{xy^2} \sin\left(x^2 y\right) + e^{xy^2} 2xy \cos\left(x^2 y\right), 2xye^{xy^2} \sin\left(x^2 y\right) + x^2 e^{x} \right. \\ &= \left(y^2 e^{xy^2} \sin\left(x^2 y\right) + e^{xy^2} 2xy \cos\left(x^2 y\right)\right) h_1 + \left(2xye^{xy^2} \sin\left(x^2 y\right) \right. \end{aligned}$$

Ketjusäännön avulla

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g\circ f}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\\
&= \frac{\partial g}{\partial u}\left(f\left(x,y\right)\right)\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\left(x,y\right)+\frac{\partial g}{\partial v}\left(\left(f\left(x,y\right)\right)\right)\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\left(x,y\right)\\
&= \left[e^{u}\sin v\right]_{u=xy^2,v=x^2y}y^2+2xy\left[e^{u}\cos v\right]_{u=xy,v=x^2y}\\
&= y^2e^{xy^2}\sin\left(x^2y\right)+2xye^{xy^2}\cos x^2y
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\frac{\partial g \circ f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \\ &= \frac{\partial g}{\partial u}\left(f\left(x,y\right)\right)\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}\left(x,y\right) + \frac{\partial g}{\partial v}\left(\left(f\left(x,y\right)\right)\right)\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\left(x,y\right) \\ &= \left[e^u \sin v\right]_{u=xy^2, v=x^2y} 2xy + x^2\left[e^u \cos v\right]_{u=xy^2, v=x^2y} \\ &= 2xye^{xy^2}\sin\left(x^2y\right) + x^2e^{xy^2}\cos x^2y.\end{aligned}$$

Siis

$$D\left(g \circ f\right)h = \left(y^2e^{xy^2}\sin\left(x^2y\right) + 2xye^{xy^2}\cos x^2y\right)h_1 + \left(2xye^{xy^2}\sin\left(x^2y\right) + x^2e^{xy^2}\text{co}\right.$$

18 Maksimimuutos

Olkoon $f(x, y)$ kahden reaalimuuttujan funktio.

Tarkastellaan kaikkia mahdollisia suunnattuja derivaattoja annetussa pisteessä $u_0 = (a, b)$.

Funktion f muutosnopeus pisteessä u_0 yksikkövektorin e suuntaan on sunnattu derivaatta $\partial_e f(u_0)$ eli

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(u_0 + he) - f(u_0)}{h} = \partial_e f(u_0)$$

- Missä näistä suunnista funktion f muutosnopeus on suurin?

• Mikä on suurin muutosnopeus?

Lause 18.1 *Olkoon* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to f(x, y)$ *differentioituva. Jos* $u_0 \in \mathbb{R}^2$ *ja* $\nabla f(u_0) \neq 0$*, niin funktion* f *suurin muutosnopeus on sunnatun derivaana maksimiarvo, joka saadaan kun vektorin suunta on sama kuin gradienttivektorin suunta,*

Todistus.

$$\partial_e f(u_0) = \nabla f(u_0) \cdot e.$$

Tällöin Cauchy-Schwarzin mukaan

$$|\partial_e f(u_0)| \leq \|\nabla f(u_0)\| \, \|e\| = \|\nabla f(u_0)\|$$

Toisaalta, kun $e = \frac{\nabla f(u_0)}{\|\nabla f(u_0)\|}$ ($\|\nabla f(u_0)\| \neq 0$, sillä $\nabla f(u_0) \neq 0$), niin

$$\partial_e f(u_0) = \|\nabla f(u_0)\|$$

Siis muutosnopeus on suurin gradientin määrämän yksikkövektorin suunnassa.

$$\partial_e f\left(u_0\right)$$

■

19 Gradientin geometrinen merkitys

Tarkastellaan graaffia

$$S = \{(x, y, z) \mid z = f(x, y),\ x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Pisteessä (x_0, y_0) tangenttitason yhtälö

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - x_0) = z - z_0$$

Siis tangenttitason normaali pisteessä (x_0, y_0) on

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)$$

Olkoon $\phi_3(t) = f(\phi_1(t), \phi_2(t))$. Tällöin käyrä

$$\gamma(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t))$$

on graafilla S. Käyrän tangentin suuntavektori saadaan seuraavasti

$$\lim_{t \to 0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} = \left(\phi_1'(t_0), \phi_2'(t_0), \phi_3'(t_0)\right)$$

Ketjusäännön nojalla

$$\phi_3'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\phi_1(t_0), \phi_2(t_0))\,\phi_1'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\phi_1(t_0), \phi_2(t_0))\,\phi_2'(t_0).$$

Siis suuntaveltori toteuttaa ehdon

$$\left(\phi_1'(t_0), \phi_2'(t_0), \phi_3'(t_0)\right)\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\phi_1(t_0), \phi_2(t_0)), \frac{\partial f}{\partial y}(\phi_1(t_0), \phi_2(t_0)), -1\right) = 0,$$

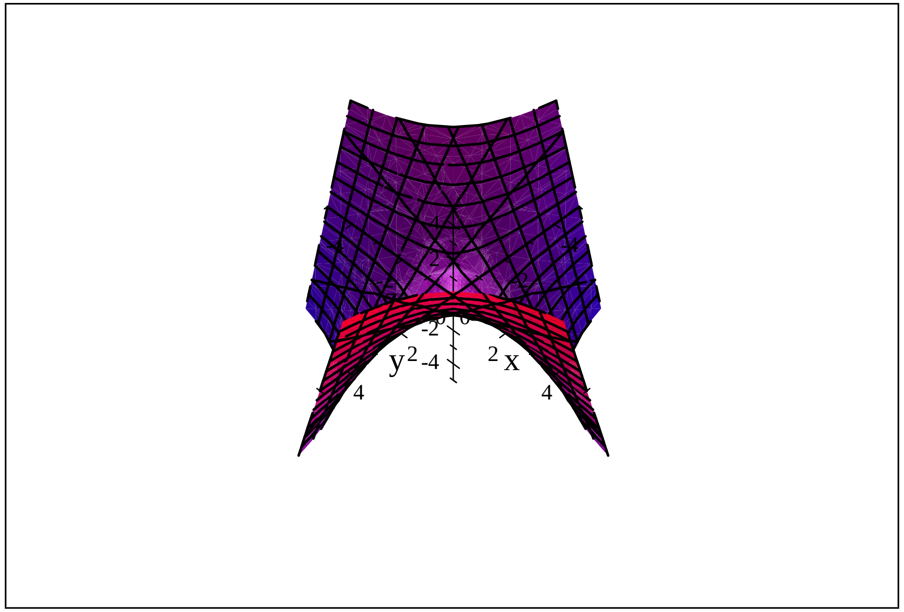
Mistä seuraa, että käyrän $\gamma(t)$ tangenttisuora

$$t\left(\phi_1'(t_0), \phi_2'(t_0), \phi_3'(t_0)\right) + (\phi_1(t_0), \phi_2(t_0), \phi_3(t_0))$$

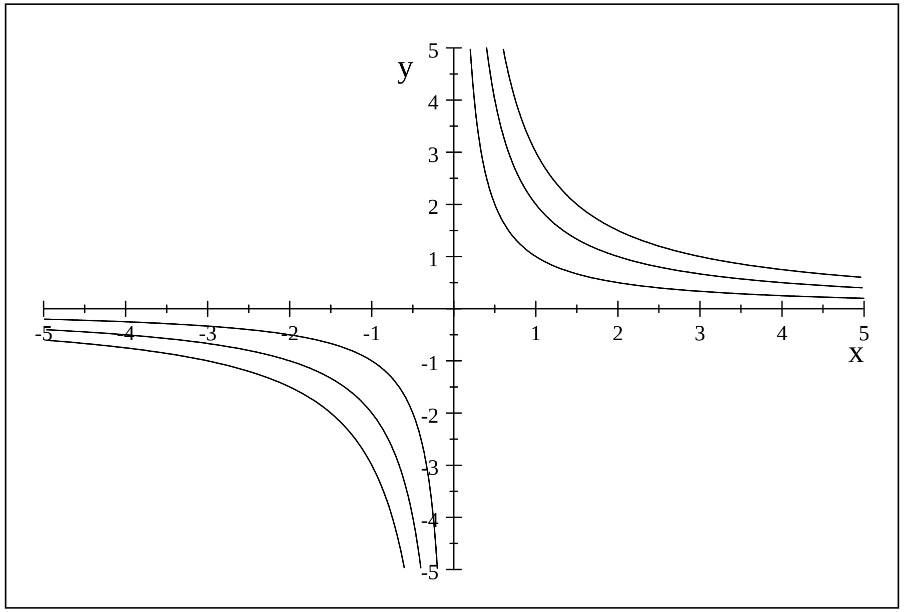
missä $t \in \mathbb{R}$ on tangenttitasossa.

Erityisesti, jos tarkastelemme tasa-arvokäyriä $f(x, y) = vakio$, niin se määrittelee käyrän $(x, y, f(x, y) = C)$

$z = xy$



$xy = 1$



y
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
x

20 Korkeamman kertaluvun osoittaisderivaatat

Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funktio.Toisen kertaluvun osittaisderivaatat määritellään seuraavasti

$$\partial_j \left(\partial_i f \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = D_{ji} f = \partial_{ji}$$

Vastaavasti

$$\partial_{i_k} \partial_{i_{k-1}} ... \partial_{i_1} f = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} ... \partial x_{i_1}} = \partial_{i_k} \partial_{i_{k-1}} ... \partial_{i_1} f = D_{i_k i_{k-1} .... i_1} f$$

mikäli $i_j \in \{1, ..., n\}$, $j = 1, ..., k$.

Jos $i_1 = ... = i_k = i \in \{1, ..., n\}$, niin merkitään

$$\partial_{i_k}\partial_{i_{k-1}}...\partial_{i_1} f = \frac{\partial^k f}{\partial x_i^k}$$

Kerrataan yhden muuttujan Taylorin kaava

Lause 20.1 (Taylorin kaava) *Olkoon $f :]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$ funktio, jonka $f^{(n-1)}$ on jatkuva välillä $]a, b[$ ja $f^{(n)}$ on olemassa välillä $]a, b[$. Tällöin jokaiselle $x, x_0 \in]a, b[$ ja $x_0 < x$, on olemassa sellainen $c \in]x_0, x[$, että*

$$f(x) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right) + R_n(x),$$

missä

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n .$$

Määritelmä 20.2 *Olkoon Ω avoin joukon $\mathbb{R}^n$ osajoukko. Joukossa Ω jatkuvien funktioiden $f : \Omega \to \mathbb{R}$ joukkoa merkitään $\mathcal{C}(\Omega)$. Sellaisten funktioiden $f : \Omega \to \mathbb{C}$ joiden kaikki osittausderivaatat $D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k}$ ovat jatkuvia $\alpha_i \in \{1, \ldots, n\}$ joukkoa merkitään $\mathcal{C}^k(\Omega)$.*

Määritelmä 20.3 *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $x_0 \in R^n$. Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$ osittaisderivaatan $D_{i_1,i_2,\ldots,i_k}f$ kertaluku on k. Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Jos funktiolla f on kaikki kertalukua k olevat osittaisderivaatat, niin merkitsemme*

$$d^{(k)}f(x_0;h) = \sum_{i_k=1}^{n} \cdots \sum_{i_1=1}^{n} \partial_{i_1 i_2 \ldots i_k} f(x_0)\, h_{i_1} h_{i_2} \ldots h_{i_k}.$$

Lauseketta $d^{(k)}f(x;h)$ *sanotaan kertalukun differentiaaliksi pisteessä. Kun* $k = 0$*,* $d^{(0)}f(x_0;h) = f(x_0)$

Lemma 20.4 *Jos* $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$*, niin*

$$d^{(k)}f(x_0;h) = \sum_{s_n+s_{n-1}+...+s_1=k} \binom{k}{s_1, s_2, ..., s_n} \frac{\partial^k f}{\partial x_n^{s_n} ... \partial x_1^{s_1}}(x_0)\, h_1^{s_1} h_2^{s_2} ... h_n^{s_t}.$$

Esimerkki 20.5

$$d^{(1)}f(x_0;h) =$$

$$d^{(2)}f(x_0;h) = D_{11}f(x_0)\,h_1^2 + D_{12}f(x_0)\,h_1h_2 + D_{21}f(x_0)\,h_2h_1 + D_{22}f(x_0)\,h_2^2.$$

Jos $f \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2\right)$*, niin*

$$d^{(k)} f^{(2)}(x_0; h) = D_{11} f(x_0) h_1^2 + 2 D_{12} f(x_0) h_1 h_1 + D_{22} f(x_0) h_2^2.$$

Lause 20.6 (Taylor) *Olkoon* $U \subset \mathbb{R}^n$ *avoin. Oletetaan, että funktion* $f : U \to \mathbb{R}$ *kaikki kertalukua* m *olevat osittaisderivaatat ovat jatkuvia. Jos* $x_0 \in U$ *ja* $x \in U$ *ja* $L(x_0, x) \subset U$*, missä*

$$L(x_0, x) = \{z \in \mathbb{R}^n |\ z = (1-t) x_0 + tx,\ t \in [0,1]\}$$

niin on olemassa sellainen $c \in L(x_0, x)$*, että*

$$f(x) = \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{d^{(k)} f(x_0; x - x_0)}{k!} \right) + R_m f(x)$$

ja

$$R_m f(x) = \frac{f^{(m)}(c, x - x_0)}{m!}.$$

Todistus. Olkoon $x = x_0 + h$. Tarkastellaan kuvausta $\varphi(t) = x_0 + th$ ja $f \circ \varphi$ käytetään ketjusääntöä välillä $]-\varepsilon, 1 + \varepsilon[$. Siis

$$f \circ \varphi(1) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(f \circ \varphi)^{(k)}(0)}{k!} \right) + R_n f(1).$$

■

Kun $n = 2$,niin

$$\begin{aligned} d^{(1)} f(x_0; th) &= (f \circ \varphi)'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) h_i \\ d^{(2)} f(x_0; th) &= (f \circ \varphi)''(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) h_i h_j \end{aligned}$$

ja induktiivisesti voimme todistaa

$$\begin{aligned} d^{(k)} f(x_0; h) &= d^{(k)} f(x_0; h) = \sum_{i_k=1}^{n} \cdots \sum_{i_1=1}^{n} \partial_{i_1 i_2 \ldots i_k} f(x_0) h_{i_1} h_{i_2} \ldots h_{i_k} \\ &= \sum_{s_n + s_{n-1} + \ldots + s_1 = k} \binom{k}{s_1, s_2, \ldots, s_n} \frac{\partial^k f}{\partial x_n^{s_n} \ldots \partial x_1^{s_1}}(x_0) h_1^{s_1} h_2^{s_2} \ldots h_n^{s_t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_m f(x) &= \frac{f^{(m)}(c, x - x_0)}{m!} = \frac{d^{(m)} f(c; h)}{m!} \\ &= \sum_{s_n + s_{n-1} + \ldots + s_1 = m} \binom{m}{s_1, s_2, \ldots, s_n} \frac{\partial^k f}{\partial x_n^{s_n} \ldots \partial x_1^{s_1}}(c)\, h_1^{s_1} h_2^{s_2} \ldots h_n^{s_t} \end{aligned}$$

Esimerkki 20.7 *Kun* $m = 2$ *ja* $f \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}^2\right)$*, niin*

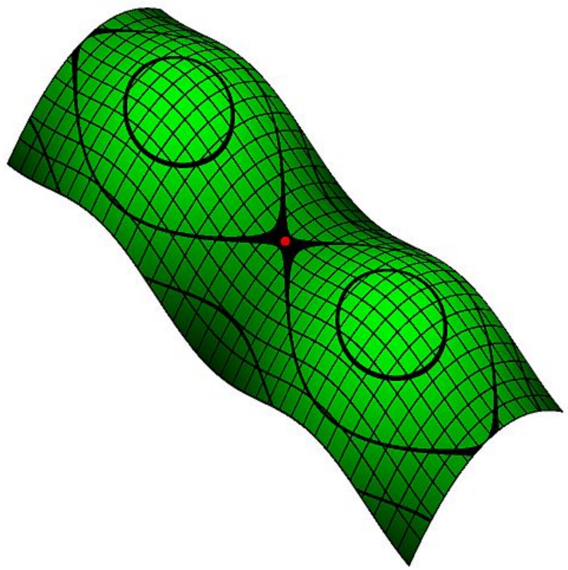
$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= \left(\sum_{k=0}^{1} \frac{d^{(k)} f(x_0; h)}{k!} \right) + R_2 f(x) \\ &= f(x_0) + h_1 D_1 f(x_0) + h_2 D_2 f(x_0) + R_2 f(x). \end{aligned}$$

Esimerkki 20.8 *Kun* $k = 3$*ja* $f \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}^2\right)$, *niin*

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= \left(\sum_{k=0}^{2} \frac{d^{(k)} f(x_0; h)}{k!}\right) + R_2 f(x) \\ &= f(x_0) + h_1 D_1 f(x_0) + h_2 D_2 f(x_0) + D_{11} f(x_0) h_1^2 + 2 D_{12} f(x_0) h_1 h_1 - \end{aligned}$$

21 Ääriarvoista

Määritelmä 21.1 *Olkoon* $U \subset \mathbb{R}^n$ *avoin ja* $f : U \to \mathbb{R}$ *differentioituva pisteessä* $a \in U$. *Jos* $Df(a) = 0$, *niin pistettä* a *sanotaan kriittiseksi pisteeksi. Kriittistä*



pistettä sanotaan satulapisteeksi, jos jokaisessa pallossa $B_r a$ on olemassa pisteet x ja y, joissa pätee ehdot $f(x) > f(a)$ ja $f(y) < f(a)$.

Määritelmä 21.2 *Olkoon $U \subset \mathbf{R}^n$ avoin. Funkiolla $f : U \to \mathbf{R}$ on lokaali maksimi* *pisteessä* $a \in U$*, jos on olemassa sellainen ympäristö* $B_r a$*, että*

$$f(x) \leq f(a)$$

jokaiselle $x \in B_r a$*. Vastaavasti funktiolla* f *on lokaali minimi pistessä* $b \in U$*, jos on olemassa sellainen ympäristö* $B_r a$*, että*

$$f(x) \geq f(a)$$

jokaiselle $x \in B_r a$*.*

Lause 21.3 *Olkoon* $U \subset \mathbb{R}^n$ *avoin ja* $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ *differentioituva pisteessä* $a \in U$*. Jos* $Df(a) = 0$*, niin piste on joko lokaali maksimi-, minimi- tai satulapiste.*

Lause 21.4 *Olkoon* $E \subset \mathbb{R}^n$ *suljettu ja rajoitettu ja* $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ *on jatkuva, niin* f *saavuttaa joukossa* E *suurimman ja pienimmän arvonsa. Joukon suurin tai pienin arvo saavutetaan joukon reunalla* ∂E *tai joukon sisäpisteessä.*

Huomaa, että jos E on suljettu, niin $E = \overline{E} = \operatorname{int} E \cup \partial E$.

Lause 21.5 *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^2$ avoin. Oletetaan, että $f : U \to \mathbb{R}$ on $\mathcal{C}^3(U)$ -funktio ja $x_0 \in U$ on funktion f kriittinen piste. Tällöin*

1. *jos*
$$D_{11}f(x_0)\,D_{22}f(x_0) - (D_{12}f(x_0))^2 > 0$$
ja $D_{11}f(x_0) > 0$, niin x_0 on aito lokaali minimipiste,

2. *jos*
$$D_{11}f(x_0)\,D_{22}f(x_0) - (D_{12}f(x_0))^2 > 0$$
ja $D_{11}f(x_0) < 0$, niin x_0 on aito lokaali maksimipiste,

3. *jos*

$$D_{11}f\left(x_0\right)D_{22}f\left(x_0\right)-\left(D_{12}f\left(x_0\right)\right)^2<0,$$

niin x_0 on satulapiste.

4. *jos $D_{11}f\left(x_0\right)D_{22}f\left(x_0\right)-\left(D_{12}f\left(x_0\right)\right)^2=0$, niin suoraan ei voi päätellä, millainen kriittinen piste se on.*

Perusteluja. **Funktiolla f on esitys**

$f\left(x_0+h\right)=f\left(x_0\right)+h_1D_1f\left(x\right)+h_2D_2f\left(x_0\right)+D_{11}f\left(x_0\right)h_1^2+2D_{12}f\left(x_0\right)h_1h_2+D_{22}f\,($

Koska x_0 on kriittinen piste, niin $\nabla f\left(x_0\right)=0$ ja $D_1f\left(x\right)=D_2f\left(x\right)=0$, joten

$f\left(x_0+h\right)=f\left(x_0\right)+D_{11}f\left(x_0\right)h_1^2+2D_{12}f\left(x_0\right)h_1h_1+D_{22}f\left(x_0\right)h_2^2+R_3f\left(x_0\right)$

Siis

$$f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)=D_{11}f\left(x_0\right)h_1^2+2D_{12}f\left(x_0\right)h_1h_1+D_{22}f\left(x_0\right)h_2^2+R_3f\left(x_0\right)$$

ja

$$R_3f\left(x_0\right)$$

Merkitään

$$\begin{aligned} a &= D_{11}f\left(x_0\right) \\ b &= D_{12}f\left(x_0\right) \\ c &= D_{22}f\left(x_0\right) \end{aligned}$$

ja $x = h_1$ sekä $y = h_2$. Olkoon $a \neq 0$. Tällöin

$$\begin{aligned} ax^2 + 2bxy + cy^2 &= a\left[\left(x^2 + 2\frac{b}{a}xy + \frac{b^2}{a^2}y^2\right) + \frac{ca - b^2}{a^2}y^2\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{by}{a}\right)^2 + \frac{ca - b^2}{a^2}y^2\right]. \end{aligned}$$

Jos $a > 0$ ja $ca - b^2 > 0$, niin x_0 on aito minimipiste, sillä Jos $a < 0$ ja $ca - b^2 > 0$, niin x_0 on aito maksimipiste.

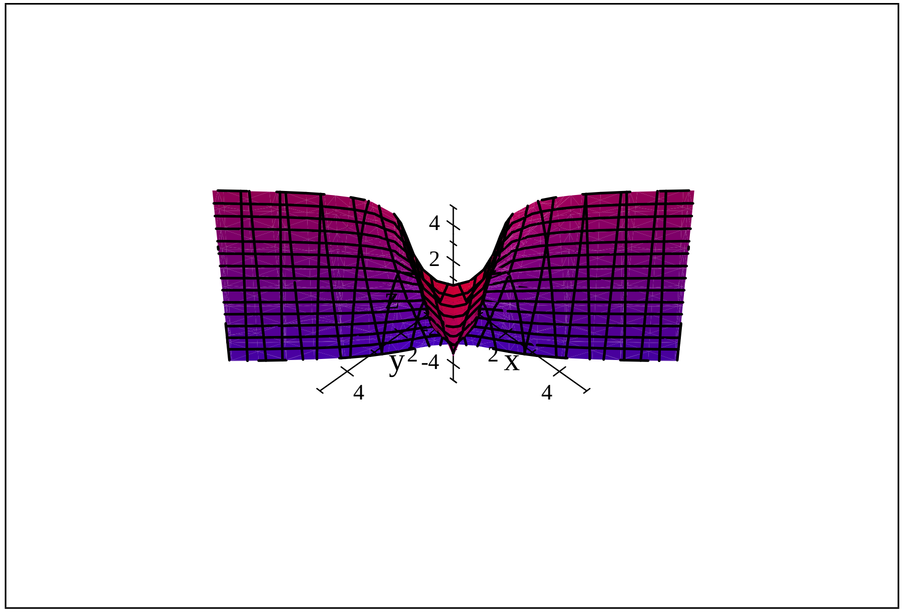
Jos $D_{11}f(x_0)\, D_{22}f(x_0) - (D_{12}f(x_0))^2 < 0$, niin satulapiste.

Esimerkki 21.6 *Olkoon* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$$

Etsi lokalit ääriarvot.

$$z = x^3 + y^3 - 3xy$$



Ratkaisu

22 Sidotut ääriarvot

Määritelmä 22.1 *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin sekä funktiot $f : U \to \mathbb{R}$ ja $g : U \to \mathbb{R}$ differentioituvia funktioita, joilla on jarkuvat osittaisderivaatat. Merkitään*

$$S = \{u \in U \mid g(u) = 0\}$$

Sidottu ääriarvotehtävä on ongelma, jossa etsitään funktion maksimi tai minimi arvoja joukossa S, ts. ehdolla $g(x) = 0$.

Lause 22.2 *Sidotun ääriarvotehtävän ratkaisu saadaan ratkaisemalla yhtälöryhmä*

$$\begin{aligned} \nabla f(u) &= \lambda \nabla g(u) \\ g(u) &= 0 \end{aligned}$$

pisteen x ja kertoimen $\lambda \in \mathbb{R}$ suhteen. Jos $u \in S$ on funktion f ääriarvopiste joukossa S ja $\nabla g(u) \neq 0$, niin $\nabla f(u) = \lambda \nabla g(u)$ jollekin kertoimelle $\lambda \in \mathbb{R}$.

Kerrointa λ sanotaaa *Lagrangen kertoimeksi*.

Esimerkki 22.3 *Olkoon* $f(x,y) = xy$ *ja* $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$. *Tällöin*

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= (y,x) \\ \nabla g(x) &= (2x, 2y) . \end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned} (y,x) &= \lambda (2x, 2y) \\ x^2 + y^2 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} y &= 2x\lambda \\ x &= 2y\lambda = 4x\lambda^2 \\ x^2 + y^2 - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned} \lambda &= \pm\frac{1}{2} \\ y &= \pm x \\ 2x^2 &= 4 \end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} x &= \pm\sqrt{2} \\ y &= \pm\sqrt{2} \\ \lambda &= \pm\frac{1}{2} \\ f(x, y) &= 2. \end{aligned}$$

Siis suorakaiteen suurin ala on 2, kun sen halkaisijan pituus on 2. Tällöin suorakaide on neliö, jonka sivu on $\sqrt{2}$*.*

22.1 Moniulotteinen Riemann integraali

Joukon $\mathbb{R}^n$ rajoitettu intervalli I on joukko, joka voidaan kirjoittaa muodossa

$$I = I_1 \times \ldots \times I_n,$$

missä joukot I_k ovat rajoitettuja välejä joukossa $\mathbb{R}$ jokaiselle $k = 1, \ldots, n$. Intervallin I mitta on kuvaus l, joka määräytyy kaavasta

$$l(I) = l(I_1) \ldots l(I_n).$$

Määritelmä 22.4 *Olkoon P_i välin I_i jako, kun $i = 1, ..., n$. Jos J_k on välin I_k jokin jaon P_k jakoväli, niin yleistettyjen intervallien*

$$J = J_1 \times ... \times J_n$$

joukkoa sanotaan intervallin I jaoksi ja sitä merkitään

$$\mathbf{P} = (P_1, ..., P_n) \, .$$

Kun intervalli J kuuluu jakoon $\mathbf{P}$, niin sitä sanotaan jaon $\mathbf{P}$ intervalliksi ja sitä merkitään $J \in \mathbf{P}$.

$$l(I) = l(I_1) \ldots l(I_n).$$

Olkoon funktio $f : I \to \mathbb{R}$ rajoitettu. Jos $\mathbf{P}$ on intervallin I on jako ja J sen jakoväli, niin määritellään luvut $M\,(f, J)$ ja $m\,(f, J)$ seuraavasti:

$$M\,(f, J) = \sup \{f(y) \mid y \in J\} \, ,$$
$$m\,(f, J) = \inf \{f(y) \mid y \in J\} \, .$$

Näiden lukujen avulla puolestaan määrittelemme jakoa $\mathbf{P}$ vastaavan Darboux yläsum-

man $U(f, \mathbf{P})$ *ja alasumman* $L(f, \mathbf{P})$ *seuraavasti:*

$$U(f, \mathbf{P}) = \sum_{J \in \mathbf{P}} M(f, J)\, l(J),$$
$$L(f, \mathbf{P}) = \sum_{J \in \mathbf{P}} m(f, J)\, l(J).$$

Lemma 22.5 *Jos* P *on intervallin* $I \subset \mathbb{R}^n$ *jako, niin*

1. $m(f, J) \leq M(f, J)$,

2. $L(f, \mathbf{P}) \leq U(f, \mathbf{P})$.

Lemma 22.6 *Olkoon $I \subset \mathbb{R}^n$ intervalli. Jos $f : I \to \mathbb{R}$ toteuttaa ehdon*

$$m \leq f(x) \leq M$$

jokaiselle $x \in I$, niin

$$ml(I) \leq L(f, \mathbf{P}) \leq U(f, \mathbf{P}) \leq Ml(I),$$

jokaiselle intervallin jaolle P.

Määritelmä 22.7 *Olkoon $I \subset \mathbb{R}^n$ intervalli. Jos $\mathbf{P} = (P_1, ..., P_n)$ ja $\mathbf{P}^* = \left(P_1^*, ..., P_n^*\right)$ ovat intervallin I jakoja ja $P_i \subset P_i^*$, niin jakoa $\mathbf{P}^*$ sanotaan jaon* $\mathbf{P}$ **tihennykseksi.**

Lemma 22.8 (Tihennyslemma) *Olkoon $f : I \to \mathbb{R}$ rajoitettu ja $\mathbf{P}$ intervalin I jako.Jos $\mathbf{P}^*$ on jaon $\mathbf{P}$ tihennys, niin*

$$L(f, \mathbf{P}) \leq L(f, \mathbf{P}^*) \leq U(f, \mathbf{P}^*) \leq U(f, \mathbf{P}).$$

Lemma 22.9 *Olkoon $I \subset \mathbb{R}^n$ intervalli ja $f : I \to \mathbb{R}$ rajoitettu. Jos $\mathbf{P}_1$ ja $\mathbf{P}_2$ ovat vintervallin I jakoja ja P^* on molempien jakojen tihennys, niin*

$$L(f, \mathbf{P}_1) \leq L(f, \mathbf{P}^*) \leq U(f, \mathbf{P}^*) \leq U(f, \mathbf{P}_2).$$

22.2 Riemann integroituvuus

Määritelmä 22.10 *Olkoon I rajoitettu intervalli ja $f : I \to \mathbb{R}$ rajoitettu. Lukua $\sup_{P \text{ jako}} L(f, \mathbf{P})$ sanotaan funktion f alaintegraaliksi, jota merkitään*

$$\underline{\int_I} f du = \sup_{P \text{ jako}} L(f, \mathbf{P}).$$

Vastaavasti lukua $\inf_{P\ \textit{jako}} U(f,\mathbf{P})$ *sanotaan funktion* f *yläintegraaliksi, jota merkitään*

$$\overline{\int_I} f\,du = \inf_{P\ \textit{jako}} U(f,\mathbf{P}).$$

Lause 22.11 *Olkoon* I *rajoitettu intervalli ja* $f : I \to \mathbb{R}$ *rajoitettu. Tällöin*

$$\underline{\int_I} f du \leq \overline{\int_I} f\,du.$$

Esimerkki 22.12 *Olkoon* I *rajoitettu intervalli. Jos* $f : I \to \mathbb{R}$ *on vakiofunktio* m*, niin*

$$\underline{\int_I} f du = ml\,(I) = \overline{\int_I} f du.$$

Määritelmä 22.13 *Olkoon $I \in \mathbb{R}^n$ rajoitettu intervalli ja $f : I \to \mathbb{R}$ rajoitettu. Funktiota $f : I \to \mathbb{R}$ sanotaan integroituvaksi, kun*

$$\underline{\int}_I f du = \overline{\int}_I f du.$$

Kun f on Riemann integroituva, merkitään

$$\underline{\int}_I f du = \int_I f \, du = \int \cdots \int_I f dx_1 \cdots dx_n.$$

Kun $I \in \mathbb{R}^2$ tai $I \in \mathbb{R}^3$, käytetään myös merkintöjä

$$\begin{aligned}
\int_I f \, du &= \iint_I f(x, y) \, dx dy \\
\int_I f \, du &= \iiint_I f df(x, y, z) \, dx dy dz.
\end{aligned}$$

Seuraus 22.14 *Vakiofunktio on integroituva jokaisella intervallilla.*

Määritelmä 22.15 *Olkoon $I \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu intervalli ja $f : I \to \mathbb{R}$ rajoitettu. Jono $(\mathbf{P}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ intervallin jakoja on funktion f* **Arkimedeen jono jakoja**, *jos*

$$\lim_{k\to\infty} \left(U\left(f, \mathbf{P}_k\right) - L\left(f, \mathbf{P}_k\right)\right) = 0.$$

Lause 22.16 (Arkimedes-Riemann lause) *Olkoon $I \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu intervalli ja $f : I \to \mathbb{R}$ rajoitettu. Tällöin f on integroituva intervallilla I, jos ja vain jos on olemassa funktion f Arkimedeen jono intervallin I jakoja $(\mathbf{P}_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Lisäksi, jos $(\mathbf{P}_k)$ on Arkimedeen jono intervallin I jakoja, niin*

$$\lim_{k\to\infty} L\left(f, \mathbf{P}_k\right) = \int_I f du = \lim_{n\to\infty} U\left(f, \mathbf{P}_k\right).$$

Lause 22.17 (Arkimedes-Riemann lauseen seuraus) *Olkoon* $I \subset \mathbb{R}^n$ *rajoitettu intervalli ja* $f : I \to \mathbb{R}$ *rajoitettu. Tällöin seuraavat ominaisuudet ovat yhtäpitäviä:*

(i) *Funktiolle* f *on olemassa Arkimedeen jono intervallin* I *jakoja,*

(ii) *Jokaiselle* $\varepsilon > 0$, *on olemassa jako sellainen* $\mathbf{P}$, *että*

$$U(f, \mathbf{P}) - L(f, \mathbf{P}) < \varepsilon.$$

22.3 Integraalin ominaisuuksia

Lause 22.18 (Addiviivisuus yli osaintervallien) *Olkoon* $I \subset \mathbb{R}^n$ *rajoitettu intervalli ja* $f : I \to \mathbb{R}$ *rajoitettu. Olkoon* $\mathbf{P}$ *intervallin jako. Tällöin* f *on integroituva,* *jos ja vain jos* $f : J \to \mathbb{R}$ *on integroituva jokaisessa jaon* $\mathbf{P}$ *osajaossa* J. *Tällöin*

$$\int_I f du = \sum_{J \in \mathbf{P}} \int_J f du.$$

Lause 22.19 (Integraalin monotonisuus) *Olkoon* $I \subset \mathbb{R}^n$ *rajoitettu intervalli. Jos* $f : I \to \mathbb{R}$ *ja* $g : I \to \mathbb{R}$ *ovat integroituvia ja*

$$f(x) \leq g(x) \qquad \text{jokaiselle } x \in I,$$

niin

$$\int_I f du \leq \int_I g du.$$

Seuraus 22.20 *Olkoon* $I \subset \mathbb{R}^n$ *rajoitettu intervalli. Jos* f *ja* $|f| : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ovat* *integroituvia, niin*

$$\left| \int_I f\,du \right| \leq \int_I |f|\,du.$$

Lause 22.21 (Integraalin lineaarisuus) *Olkoon $I \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu intervalli. Jos $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ja $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ovat integroituvia ja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, niin*

$$\int_I (\alpha f + \beta g)\,du = \alpha \int_I f\,du + \beta \int_I g\,du.$$

22.4 Darboux konvergenssi kriteeri

22.5 Jatkuvan funktio on itegroituva

Lause 22.22 *Jatkuva funktio* $f : I \to \mathbb{R}$ *on integroituva rajoitetulla intervallilla* I.

22.6 Fubinin lause

Lause 22.23 (Fubinin lause) *Olkoon* I *intervalli avaruudessa* $\mathbb{R}^{n+k}$ *ja rajoitettu funktio* $f : I \to \mathbb{R}$ *integroituva. Merkitään*

$$I = I_1 \times ... \times I_{n+k}$$

ja

$$I_{\mathbf{x}} = I_{\mathbf{1}} \times ... \times I_n,$$
$$I_{\mathbf{y}} = I_{n+\mathbf{1}} \times ... \times I_{n+k}$$

sekä

$$\int_{I_{\mathbf{x}}} h = \int_{I_{\mathbf{x}}} h d\mathbf{x}$$
$$\int_{I_{\mathbf{y}}} h = \int_{I_{\mathbf{y}}} h d\mathbf{y}$$

Jokaiselle $\mathbf{x} \in J_{\mathbf{1}}$ määritellään funktiot $F_{\mathbf{x}} : I_{\mathbf{y}} \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$F_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Jos F_x on integroituva jokaiselle $x \in I_{\mathbf{x}}$, niin funktio $A : I_{\mathbf{x}} \to \mathbb{R}$

$$A(x) = \int_{I_{\mathbf{y}}} F_{\mathbf{x}}(y)\, d\mathbf{y} = \int_{I_{\mathbf{y}}} f(x, y)\, d\mathbf{y}$$

on integroituva ja

$$\int_I f du = \int_{I_\mathbf{x}} A(x)\, d\mathbf{x} = \int_{I_\mathbf{x}} \left(\int_{I_\mathbf{y}} f(x,y)\, d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x}.$$

Seuraus 22.24 *Olkoon I intervalli avaruudessa $\mathbb{R}^2$ ja rajoitettu funktio $f : I \to \mathbb{R}$ integroituva. Merkitään*

$$I = I_1 \times I_2.$$

ja jos $F_\mathbf{x} : I_\mathbf{2} \to \mathbb{R}$ ja $F_\mathbf{y} : I_\mathbf{1} \to \mathbb{R}$ ovat integroituvia, niin

$$\iint\limits_{I_\mathbf{1} \times I_\mathbf{2}} f(x,y)\, dxdy = \int_{I_1} \left(\int_{I_2} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x} = \int_{I_2} \left(\int_{I_1} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mathbf{x} \right) d\mathbf{y}.$$

Seuraus 22.25 *Olkoon* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *on jatkuva ja kompakti kantajainen, ts joukko* $S(f)=\overline{\left\{u\in\mathbb{R}^{n+k}\ \mid f(x)\neq 0\right\}}$ *on suljettu ja rajoitettu. Tällöin funktiot* $F_{\mathbf{x}}:I_{\mathbf{2}}\to\mathbb{R}$ *ja* $F_{\mathbf{y}}:I_{\mathbf{1}}\to\mathbb{R}$ *ovat integroituvia ja funktiot* $A:I_{\mathbf{1}}\to\mathbb{R}$

$$A(x)=\int_{I_{\mathbf{2}}}F_{\mathbf{x}}(y)\,d\mathbf{y}=\int_{I_{\mathbf{y}}}f(x,y)\,d\mathbf{y}$$

ja $B:I_{\mathbf{2}}\to\mathbb{R}$ *ovat jatkuvia sekä*

$$\int\int_{I_{\mathbf{1}}\times I_{\mathbf{2}}}f(x,y)\,dxdy=\int_{I_{\mathbf{1}}}\left(\int_{I_{\mathbf{2}}}f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{y}\right)d\mathbf{x}=\int_{I_{\mathbf{2}}}\left(\int_{I_{\mathbf{1}}}f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{x}\right)d\mathbf{y}.$$

Seuraus 22.26 *Olkoon* $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *on jatkuva ja kompakti kantajainen, ts joukko* $S(f)=\overline{\{u\in\mathbb{R}^n\ \mid f(x)\neq 0\}}$ *on rajoitettu.. Olkoon* $I=I_{\mathbf{1}}\times\ldots\times I_n\subset\mathbb{R}^n$

sellainen intervalli. että $S(f) \subset I$. Tällöin

$$\begin{aligned}\int_I f du &= \int_{I_n} ... \left(\int_{I_1} f(x_1, ..., x_n)\, dx_1 \right) dx_2 ... dx_n \\ &= ... = \int_{I_1} \cdots \int_{I_{n-1}} \left(\int_{I_n} f(x_1, ..., x_n)\, dx_n \right) dx_{n-1} ... dx_1.\end{aligned}$$

Lisäksi integrointi ei ole riipppuvainen, missä järjestyksessä integrointi suoritetaan muuttujien $x_1, ..., x_n$ suhteen.

Määritelmä 22.27 *Olkoon $I \subset \mathbb{R}^n$ intervalli ja D intervallin I osajoukko. Rajoitetun funktion $f : D \to \mathbb{R}$* **nolla laajennus** *on funktio $\widehat{f} : I \to \mathbb{R}$, joka määritellään seuraavasti*

$$\widehat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{kun } x \in D, \\ 0, & \text{kun } x \in I \backslash D. \end{cases}$$

Määritelmä 22.28 *Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$. Rajoitettua funktiota $f : D \to \mathbb{R}$ sanotaan* **integroituvaksi**, *jos on olemassa sellainen intervalli I, jossa funktion f nolla laajennus $\widehat{f} : I \to \mathbb{R}$ on integroituva. Tällöin merkitään*

$$\int_D f = \int_I \widehat{f}.$$

Lause 22.29 *Olkoon $I \subset \mathbb{R}^n$ intervalli ja $h : I \to \mathbb{R}$ sekä $g : I \to \mathbb{R}$ jatkuvia rajoitettuja funktioita, jotka toteuttavat*

$$h(x) \leq g(x) \quad \textit{jokaiselle } x \in I.$$

Merkitään

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in I,\ y \in [h(x), g(x)]\right\}.$$

Jos funktio $f : D \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja rajoitettu, niin

$$\int_D f du = \int_I \left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(\mathbf{x}, y)\, dy \right) d\mathbf{x}.$$

Seuraus 22.30 *Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ väli ja $h : I \to \mathbb{R}$ sekä $g : I \to \mathbb{R}$ jatkuvia rajoitetuja funktioita, jotka toteuttavat*

$$h(x) \leq g(x) \quad \textit{jokaiselle } x \in I.$$

Merkitään

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I,\, y \in [h(x), g(x)] \right\}.$$

Integraali

$$\iint_D dx dy = \int_I \left(\int_{h(x)}^{g(x)} dy \right) d\mathbf{x}.$$

antaa kappaleen D pinta-alan.

Seuraus 22.31 *Olkoon $S \subset \mathbb{R}^2$ rajoitettu ja $h : I \to \mathbb{R}$ sekä $g : I \to \mathbb{R}$ jatkuvia rajoitettuja funktioita, jotka toteuttavat*

$$h(x, y) \leq g(x, y) \quad \textit{jokaiselle } x \in (x, y) \in S.$$

Merkitään

$$D = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in S,\ z \in [h(x, y), g(x, y)]\}.$$

Integraali

$$\iint\limits_D dxdy = \int_S \left(\int_{h(x,y)}^{g(x,y)} dz \right) dxdy = \int_S g(x, y)\, dxdy - \int_S h(x, y)\, dxdy.$$

antaa kappaleen D tilavuuden.

Lause 22.32 *Olkoon $I \subset \mathbb{R}^n$ intervalli ja $h : I \to \mathbb{R}$ sekä $g : I \to \mathbb{R}$ jatkuvia rajoitetuja funktioita, jotka toteuttavat*

$$h(y) \leq g(y) \quad \textit{jokaiselle } y \in I.$$

Merkitään

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y \in I,\, x \in [h(y), g(y)]\right\}.$$

Jos funktio $f : D \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja rajoitettu, niin

$$\iint\limits_D f\,dxdy = \int_I \left(\int_{h(y)}^{g(y)} f(x, \mathbf{y})\,dx\right) d\mathbf{y}.$$

Lause 22.33 *Olkoon T bijektiivinen jatkuvasti differentioituva kuvaus avoimelta rajoitetulta joukolta $E \subset \mathbb{R}^3$ joukkoon $\mathbb{R}^3$ ja oletetaan, että $T'(u) \neq 0$ jokaiselle*

$u \in E$. *Jos* f *on reaaliarvoinen jatkuva funktio, jonka kantaja* $\mathsf{supp}\,(f)$ *on rajoitettu ja* $\mathsf{supp}\,(f) \subset E$, *niin*

$$\iiint\limits_{E} f(x,y,z)\,dx dy dz = \iint\int\limits_{T^{-1}(E)} f(T(u))\,|\mathsf{det}\, DT(u)|\, du_1 du_2 du_3 \qquad (1)$$

missä $\mathsf{det}\, DT(u)$ *on derivaattakuvauksen indusoimat matriisin (ts., Jacobin matriisin) determinantti (ts. Jacobin determinantti) ja* $|\mathsf{det}\, DT(x)|$ *on sen itseisarvo.*

Lause 22.34 *Olkoon* T *bijektiivinen jatkuvasti differentioituva kuvaus avoimelta rajoitetulta joukolta* $E \subset \mathbb{R}^2$ *joukkoon* $\mathbb{R}^2$ *ja oletetaan, että* $T'(u) \neq 0$ *jokaiselle* $u \in E$. *Jos* f *on reaaliarvoinen jatkuva funktio, jonka kantaja* $\mathsf{supp}\,(f)$ *on rajoitettu ja* $\mathsf{supp}\,(f) \subset E$, *niin*

$$\iint\limits_{E} f(x,y)\,dx dy = \int\int\limits_{T^{-1}(E)} f(T(u))\,|\mathsf{det}\, DT(u)|\, du_1 du_2 \qquad (2)$$

missä $\det DT(u)$ *on derivaattakuvauksen indusoimat matriisin (ts., Jacobin matriisin) determinantti (ts. Jacobin determinantti) ja* $|\det DT(x)|$ *on sen itseisarvo.*

23 Epäoleellinen Riemann integraali

Kertaamme vain määritelmät. Lukija voi miettiä, mitkä tulokset yleistyvät epäoleellisille Riemann integraaleille.

Määritelmä 23.1 *Olkoon* $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ *siten, että* $a < b$. *Jos funktio* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *on integroituva suljetulla väliillä* $[c, d]$ *jokaiselle* c,d, *jotka toteuttavat*

$a < c < d < d$, ja raja-arvot

$$\lim_{d \to b} \int_c^d f\, dx$$

$$\lim_{c \to a} \int_c^d f\, dx$$

ovat olemassa, niin sanotaan, että funktiolla f on olemassa **epäoleellinen Riemann integraali**, *jota merkitään*

$$\int_a^b f\, dx = \lim_{c \to a} \int_c^w f\, dx + \lim_{d \to b} \int_w^d f\, dx.$$

Määritelmä 23.2 *Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Jos funktio f on integroituva jokaisella intervallilla I ja raja-arvo*

$$\lim_{\text{diam}\, I \to \infty} \int_I f\, du$$

on olemassa, niin sanotaan, että funktiolla f on olemassa **epäoleellinen Riemann integraali joukossa** $\mathbb{R}^n$*, jota merkitään*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,du = \lim_{\text{diam}\,I \to \infty} \int_I f\,du$$

Määritelmä 23.3 *Olkoon $A_k \in \mathbb{R}^n$ rajoitettu ja $A_k \subset A_{k+1}$. Jos funktio f on integroituva jokaisessa joukossa A_k ja raja-arvo*

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \int_{A_k} f\,dx$$

on olemassa, niin sanotaan, että funktiolla f on olemassa **epäoleellinen Riemann integraali joukossa** $A = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$*, jota merkitään*

$$\int_A f\,dx = \lim_{k \to \infty} \int_{A_k} f\,du.$$

Määritelmä 23.4 *Olkoon* $A_k \in \mathbb{R}^n$ *rajoitettu ja* $A_{k+1} \subset A_k$. *Jos funktio* f *on integroituva jokaisessa joukossa* A_k *ja raja-arvo*

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \int_{A_k} f\, dx$$

on olemassa, niin sanotaan, että funktiolla f *on olemassa* **epäoleellinen Riemann integraali joukossa** $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, *jota merkitään*

$$\int_A f\, dx = \lim_{k \to \infty} \int_{A_k} f\, du.$$