HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Vektorianalyysi I, syksy 2018
Harjoitus 5 – Ratkaisuehdotukset

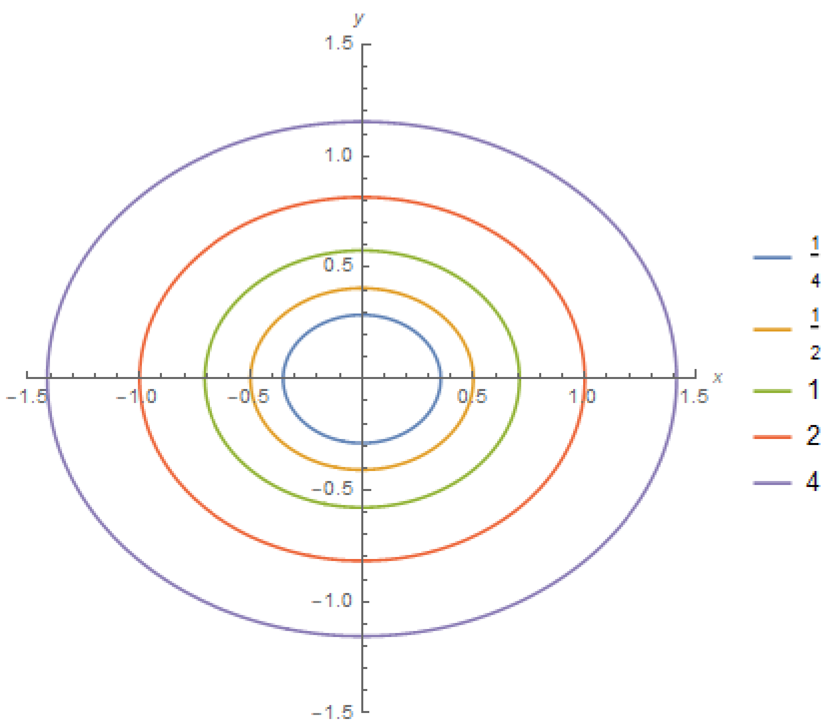
Tehtävä 1. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_2^2$$

Olkoon $C \in \mathbb{R}$. Määritä tasa-arvojoukko

$$Sf(C) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, f(x_1, x_2) = C\}.$$

Piirrä tasa-arvokäyriä eri vakion C arvoilla. Mikä on funktion f maksimaalisen kasvunopeuden suunta pisteessä $x_0 = (1, 1) \in Sf(5)$. Osoita, että se on kohtisuorassa tasa-arvokäyrän tangenttia vastaan pisteessä $(1, 1)$.



Kuva 1: Funktion f tasa-arvokäyriä

Ratkaisu. Suurin kasvunopeus on gradientin suuntaan

$$\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} 4x_{0,1} \\ 6x_{0,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Tarkastellaan sitten seuraavaa polkua:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5}{2}}\cos(t) \\ \sqrt{\frac{5}{3}}\sin(t) \end{pmatrix}$$

Nyt

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)(t) &= 2 \cdot \frac{5}{2}\cos^2(t) + 3 \cdot \frac{5}{3}\sin^2(t) \\ &= 5(\cos^2(t) + \sin^2(t)) \\ &= 5 \end{aligned}$$

siis $\gamma(t) \in Sf(5)$ kaikilla t, joten $\gamma'(t)$ on käyrän $Sf(5)$ tangentti pisteessä $\gamma(t)$. Olkoon sitten $t_0 \in \mathbb{R}$ siten, että $\gamma(t_0) = x_0 = (1, 1)$. Siis

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5}{2}}\cos(t_0) \\ \sqrt{\frac{5}{3}}\sin(t_0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos(t_0) \\ \sin(t_0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{5}} \\ \sqrt{\frac{3}{5}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nyt saadaan käyrälle $Sf(5)$ tangentti pisteeseen x_0:

$$\begin{aligned} \gamma'(t_0) &= \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{5}{2}}\sin(t_0) \\ \sqrt{\frac{5}{3}}\cos(t_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{5}{2}}\sqrt{\frac{3}{5}} \\ \sqrt{\frac{5}{3}}\sqrt{\frac{2}{5}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tarkastellaan sitten gradientin ja tangentin sisätuloa:

$$\begin{aligned}\langle \nabla f(x_0), \gamma'(t_0)\rangle &= 4\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + 6\sqrt{\frac{2}{3}} \\ &= 4\left(-\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \\ &= 4\sqrt{\frac{3}{2}}\left(-1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

Gradientti on siis kohtisuorassa tasa-arvokäyrän tangenttia vastaan. Samaan tulokseen voi päätyä huomaamalla, että yllä oleva sisätulo on vakiofunktion $f \circ \gamma$ derivaatta pisteessä t_0.

Tehtävä 2. Määritä funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = 3x^3 + y^2 - 9x + 4y$$

ääriarvopisteet ja niiden laatu.

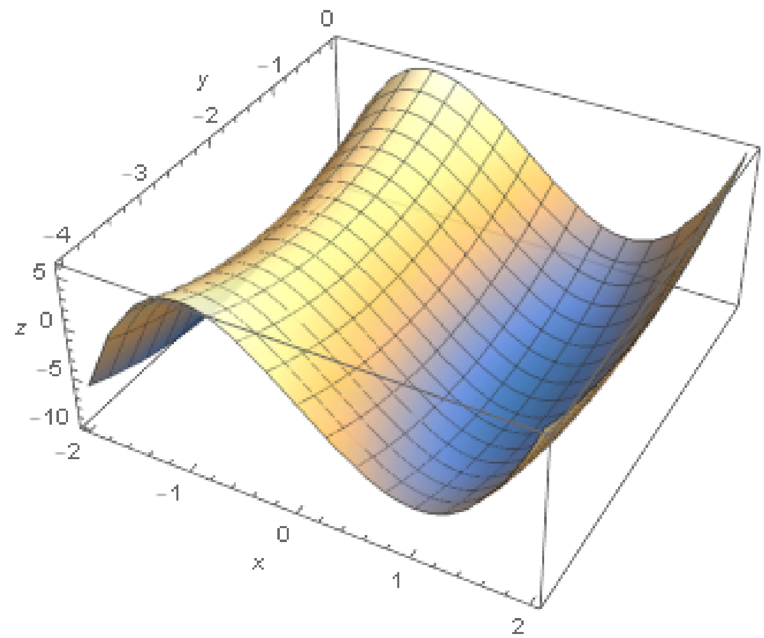
Ratkaisu. Funktio f on polynomina sileä (eli C^∞) ja määritelty koko tasossa, joten riittää tarkastella gradientin nollakohdat mahdollisten ääriarvopisteiden löytämiseksi.

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 9x^2 - 9 \\ 2y + 4 \end{pmatrix} = 0 \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} x^2 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Gradientin nollakohdat ovat siis $(1, -2)$ ja $(-1, -2)$. Selvitetään näiden pisteiden laatu tarkastelemalla toisen kertaluvun osittaisderivaattoja. Hessen matriisi funktiolle f määritellään seuraavasti:

$$D^2 f(x, y) := \begin{bmatrix} \partial_{xx} f(x, y) & \partial_{xy} f(x, y) \\ \partial_{yx} f(x, y) & \partial_{yy} f(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18x & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Huomataan, että $\det[D^2 f(x, y)] = \partial_{xx} f(x, y)\partial_{yy} f(x, y) - (\partial_{xy} f(x, y))^2 = 36x$. Tämä luentomuistiinpanojen lauseessa 4.4.15. esiintyvä lauseke on siis Hessen matriisin determinantti, ja se on selvästi positiivinen pisteessä $(1, -2)$ ja negatiivinen pisteessä $(-1, -2)$. Piste $(-1, -2)$ on siis satulapiste. Pisteessä $(1, -2)$ lisäksi pätee $\partial_{xx} f(x, y) = 36 > 0$, joten kyseessä on lokaali minimi. Funktio f ei ole alhaalta rajoitettu, joten minimi ei ole globaali.



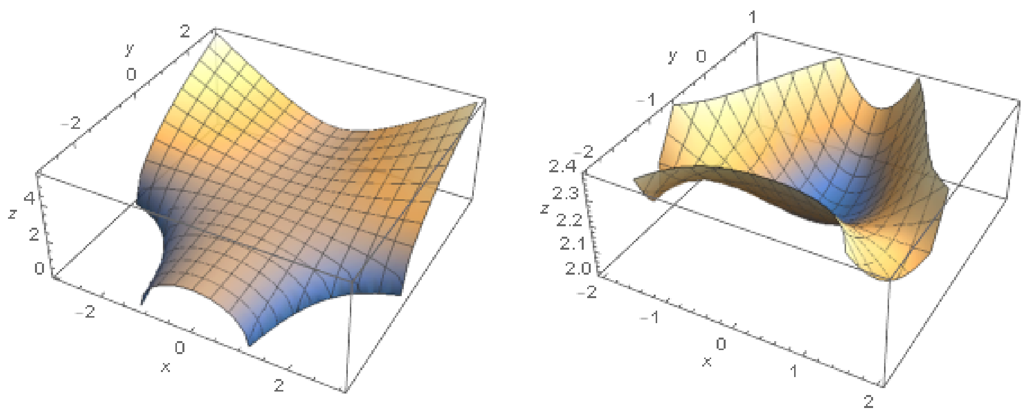
Kuva 2: Funktion f graafi

Tehtävä 3. Määritä origon minimietäistyys funktion $f(x, y) = \sqrt{x^2 y + 4}$ graafista. Ohje: määritä etäyisyysfunktion minimi ehdolla, että piste (x, y, z) on funktion f graafilla.

Ratkaisu. Funktio f on määritelty joukossa $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|x^2 y + 4 \geq 0\}$, jonka reuna on joukko $\partial\Omega = \{(x, y)|x^2 y + 4 = 0\} = \{(x, -\frac{4}{x^2})|x \in \mathbb{R}\}$.

Etäisyysfunktio graafiin $g : \Omega \to \mathbb{R}$ saadaan kolmiulotteisena normina, jossa kolmannen koordinaatin paikalle on sijoitettu funktion f arvo seuraavasti:

$$g(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 + (\sqrt{x^2 y + 4})^2} = \sqrt{x^2(1+y) + y^2 + 4}$$



Kuva 3: Oikealla funktion f graafi, vasemmalla etäisyysfunktion g graafi kriittisten pisteiden lähellä

Funktio g on sileä joukon Ω sisäpisteissä, joten jos etäisyydellä on minimi, löytyy se joko funktion g gradientin nollakohdista tai määrittelyjoukon reunalta $\partial\Omega$. Tarkastellaan ensin gradientin nollakohtia:

$$\begin{aligned}
\nabla g(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{x^2(1+y)+y^2+4}} \begin{pmatrix} x(1+y) \\ y + \frac{x^2}{2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{g(x,y)} \begin{pmatrix} x(1+y) \\ y + \frac{x^2}{2} \end{pmatrix} = 0 \\
&\Rightarrow \begin{pmatrix} x(1+y) \\ y + \frac{x^2}{2} \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad x = 0 \quad \text{tai} \quad y = -1 \\
&\Rightarrow \quad y = 0 \qquad\quad\;\; x = \pm\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Kriittiset pisteet ovat siis $(0,0)$, $(\sqrt{2},-1)$ ja $(-\sqrt{2},-1)$. Huomaa, että funktion g lauseke $\sqrt{x^2(1+y)+y^2+4}$ on määritelty Ω:a suuremmassa joukossa. On siis oleellista kiinniittää huomiota siihen, että kolme löydettyä kriittistä pistettä kuuluu joukkoon Ω.

Tarkastellaan sitten toisen kertaluvun derivaattoja pisteiden laatujen selvittämiseksi. Hessen matriisille saadaan seuraava lauseke:

$$D^2g(x,y) = \frac{1}{g(x,y)}\begin{bmatrix} 1+y & x \\ x & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{g(x,y)^3}\begin{bmatrix} x^2(1+y)^2 & x(1+y)(y+\frac{x^2}{2}) \\ x(1+y)(y+\frac{x^2}{2}) & (y+\frac{x^2}{2})^2 \end{bmatrix}$$

$$D^2g(0,0) = \frac{1}{g(0,0)}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D^2g(\pm\sqrt{2},-1) = \frac{1}{g(\pm\sqrt{2},-1)}\begin{bmatrix} 0 & \pm\sqrt{2} \\ \pm\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 & \pm\sqrt{2} \\ \pm\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Nyt sadaan seuraavat tulokset:

$$\det[D^2g(\pm\sqrt{2},-1)] = -(\pm\sqrt{2})^2 < 0,$$

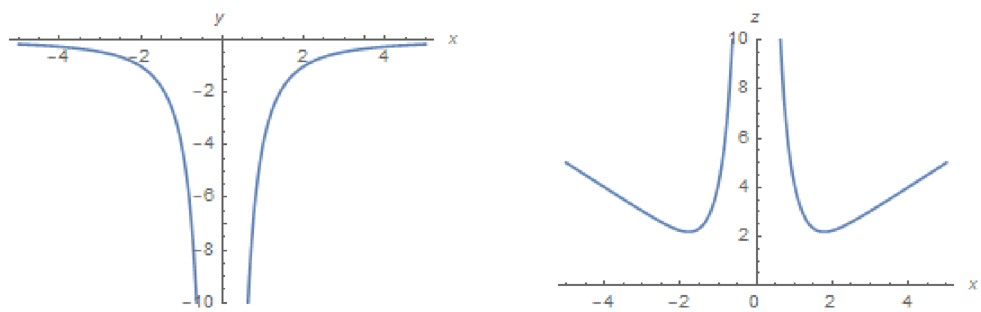
joten $(\sqrt{2},-1)$ ja $(-\sqrt{2},-1)$ ovat satulapisteitä.

$$\det[D^2g(0,0)] = \frac{1}{4} > 0 \quad \text{ja} \quad \partial_{xx}g(0,0) = \frac{1}{2} > 0,$$

joten origo on etäisyysfunktion g lokaali minimi. Jotta voidaan määrittää onko kyseessä globaali minimi, tulee meidän vielä tutkia reuna $\partial\Omega$.

Voidaan ensin huomata, että funktio f on identtisesti nolla reunalla, joten tämä osa graafista on kokonaan xy-tasossa. Kun lisäksi hyödynnetään reunapisteiden parametrisaatiota $(x,y) = (x, -\frac{4}{x^2})$, saadaan etäsyysfunktiolle $h : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ seuraava lauseke:

$$h(x) = \sqrt{x^2 + \left(-\frac{4}{x^2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{16}{x^4}}$$



Kuva 4: Vasemmalla osa reunasta xy-tasossa, oikealla etäisyysfunktion h graafi

Funktio h on sileä koko määrittelyjoukossaan, joten minimien löytämiseksi riittää tarkastella derivaatan nollakohdat:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{x - \frac{32}{x^5}}{\sqrt{x^2 + \frac{16}{x^4}}} = 0 \\ &\Rightarrow x - \frac{32}{x^5} = 0 \\ &\Rightarrow x = \pm\sqrt[6]{32} \end{aligned}$$

Havaitaan, että $\sqrt[6]{32}$ on funktion h ainoa kriittinen piste välillä $(0, \infty)$ ja että $h(x) \to \infty$ molemmissa päätepisteissä. Voidaan siis päätellä, että kyseessä on globaali minimi joukossa $(0, \infty)$. Funktio h on parillinen, joten vastaava päättely pätee pisteelle $-\sqrt[6]{32}$ joukossa $(-\infty, 0)$.

Verrataan sitten reunan minimiä sisäpisteiden minimiin: $g(0,0) = 2$ ja $h(\pm\sqrt[6]{32}) = \sqrt[6]{32}\sqrt{\frac{3}{2}} > 2$. Funktiolle g saadaan vielä seuraava arvio: $g(x,y) \geq \|(x,y)\|$, joten $g(x,y) \to \infty$, kun $\|(x,y)\| \to \infty$. Kokoamalla nämä havainnot voidaan päätellä, että funktion f graafin piste $(0,0,f(0,0))$ on antaa globaalin minimin etäisyydelle origosta $(0,0,0)$.

Tehtävä 4. Ratkaise edellinen tehtävä käyttäen Lagrangen kertoimien menetelmää.

Ratkaisu. Tarkastelu tulee jälleen erotella reunaan ja sisäpisteisiin. Sisäpisteissä etsitään kolmiulotteisen normin minimiä ehdolla, että piste on graafilla.

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases}
\nabla\|(x,y,z)\| = \lambda\nabla(f(x,y)-z)\\
f(x,y)-z=0
\end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases}
\dfrac{x}{\|(x,y,z)\|} = \dfrac{\lambda xy}{f(x,y)}\\
\dfrac{y}{\|(x,y,z)\|} = \dfrac{\lambda x^2}{2f(x,y)}\\
\dfrac{z}{\|(x,y,z)\|} = -\lambda\\
f(x,y)=z
\end{cases}\\
\Rightarrow &\begin{cases}
\dfrac{x}{\|(x,y,z)\|} = -\dfrac{xyz}{\|(x,y,z)\|z}\\
\dfrac{y}{\|(x,y,z)\|} = -\dfrac{x^2 z}{2\|(x,y,z)\|z}
\end{cases}\\
\Rightarrow &\begin{cases}
x=-xy\\
2y=-x^2
\end{cases}\\
&\Rightarrow \quad x=0 \quad \text{tai} \quad y=-1\\
&\Rightarrow \quad y=0 \qquad\quad\ \ x=\pm\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Päädyttiin siis samoihin pisteisiin kuin edellisessä tehtävässä. Käytetään myös laadun selvittämiseen toista tekniikkaa. Vertaillaan ensin etäisyysfunktion arvoja näissä pisteissä: $g(\pm\sqrt{2},-1)=\sqrt{5}>2=g(0,0)$. Jos jokin näistä näistä pisteistä on minimi, täytyy sen siis olla $(0,0)$. Kuten edellisen tehtävän lopulla todettiin, g kasvaa rajatta, kun $\|(x,y)\|\to\infty$. Jos tiedetään lisäksi että $g(x,y)>2$, kun $(x,y)\in\partial\Omega$, voidaan päätellä pisteen $(0,0)$ olevan minimi. Etsitään siis etäisyyden minimi reunalla:

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases} \nabla\|(x,y)\| = \lambda\nabla(x^2y+4) \\ x^2y+4=0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} \dfrac{x}{\|(x,y)\|} = 2\lambda xy \\ \dfrac{y}{\|(x,y)\|} = \lambda x^2 \\ x^2y+4=0 \end{cases} \\
\Rightarrow &\begin{cases} \dfrac{x^2}{\|(x,y)\|} = 2\lambda x^2 y \\ \dfrac{2y^2}{\|(x,y)\|} = 2\lambda x^2 y \end{cases} \\
\Rightarrow &\; x^2 = 2y^2 \\
\Rightarrow &\; 2y^3 = -4 \\
\Rightarrow &\; y = -\sqrt[3]{2} \\
\Rightarrow &\; x = \pm\sqrt{\frac{4}{\sqrt[3]{2}}} = \pm\frac{2}{\sqrt[6]{2}} = \pm\sqrt[6]{32}
\end{aligned}
$$

Kuten edellisessä tehtävässä todettiin, pisteiden $(\pm\sqrt[6]{32}, -\sqrt[3]{2})$ etäisyys origosta on suurempi kuin 2, joten graafin piste $(0,0,f(0,0))$ minimoi etäisyyden origosta.

Tehtävä 5. Määritä funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \|x\|$$

(a) ensimmäisen kertaluvun Taylorin polynomi pisteessä $(3,4)$ ja arvioi sillä funktion f arvoa pisteessä $(3.1, 3.9)$.

(b) toisen kertaluvun Taylorin polynomi pisteessä $(3,4)$ ja arvioi sillä funktion f arvoa pisteessä $(3.1, 3.9)$.

Ratkaisu. Merkitään $x_0 = (x_{01}, x_{02}) = (3,4)$ ja $h = (h_1, h_2) = (3.1, 3.9) - (3,4) = \frac{1}{10}(1,-1)$. Saadaan seuraavat tulokset:

$$f(x_0) = \|(3,4)\| = 5$$

$$
\begin{aligned}
df(x_0)(h) &= \langle \nabla f(x_0), h \rangle \\
&= \left\langle \frac{x_0}{\|x_0\|}, h \right\rangle \\
&= \frac{3h_1 - 4h_2}{5}
\end{aligned}
$$

Nämä kokoamalla saadaan ensimmäisen kertaluvun taylorin kehitelmä:

$$
\begin{aligned}
(T^1_{x_0} f)(h) &= f(x_0) + df(x_0)(h) \\
&= 5 + \frac{3h_1 - 4h_2}{5} \\
&= 5 - \frac{1}{50} \\
&= 4.98
\end{aligned}
$$

Toisen kertaluvun differentiaali voidaan määrittää Hessen matriisin avulla seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
d^2 f(x_0)(h) &= \partial_{xx} f(x_0) h_1^2 + 2\partial_{xy} f(x_0) h_1 h_2 + \partial_{yy} f(x_0) h_2^2 \\
&= \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_{xx} f(x_0) & \partial_{xy} f(x_0) \\ \partial_{xy} f(x_0) & \partial_{yy} f(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \\
&= h^{\mathrm{T}} D^2 f(x_0) h
\end{aligned}
$$

Hessen matriisille saadaan seuraava arvo:

$$
\begin{aligned}
D^2 f(x_0) &= \frac{1}{\|x_0\|} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{\|x_0\|^3} \begin{bmatrix} x_{01}^2 & x_{01} x_{02} \\ x_{01} x_{02} & x_{02}^2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{125} \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Nyt

$$
d^2 f(x_0)(h) = \frac{h_1^2 + h_2^2}{5} - \frac{9h_1^2 + 24h_1 h_2 + 16h_2^2}{125}
$$

Toisen kertaluvun Tayloring polynomille saadaan nyt laskettua seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
(T^2_{x_0} f)(h) &= (T^1_{x_0} f)(h) + \frac{1}{2} d^2 f(x_0)(h) \\
&= 5 + \frac{3h_1 - 4h_2}{5} + \frac{h_1^2 + h_2^2}{10} - \frac{9h_1^2 + 24h_1 h_2 + 16h_2^2}{250} \\
&= 5 - \frac{1}{50} + \frac{1}{500} - \frac{1}{25000} \\
&= 4.98196
\end{aligned}
$$

Vertailua varten $f(3.1, 3.9) = 4.981967482...$

Tehtävä 6. Etsi funktion

$$f(x,y) = xy + \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$$

kriittiset pisteet ja selvitä ovatko ne lokaaleja ääriarvopisteitä vai satulapisteitä.

Ratkaisu. Funktio f on sileä koko määrittelyjoukossaan, joka on avoin. Funktion f kriittiset pisteet ovat siis sen gradientin nollakohdat.

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y - \frac{2}{x^2} \\ x - \frac{4}{y^2} \end{pmatrix} &= 0 \\
&\Rightarrow \begin{cases} x^2 y = 2 \\ y^2 x = 4 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} x^2 y^2 = 2y \\ y^2 x^2 = 4x \end{cases} \\
&\Rightarrow y = 2x \\
&\Rightarrow 2y^3 = 2 \\
&\Rightarrow (x,y) = (1,2)
\end{aligned}$$

Tarkastellaan sitten toisen kertaluvun derivaattoja laadun määrittämiseksi.

$$D^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{4}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{8}{y^3} \end{bmatrix}$$

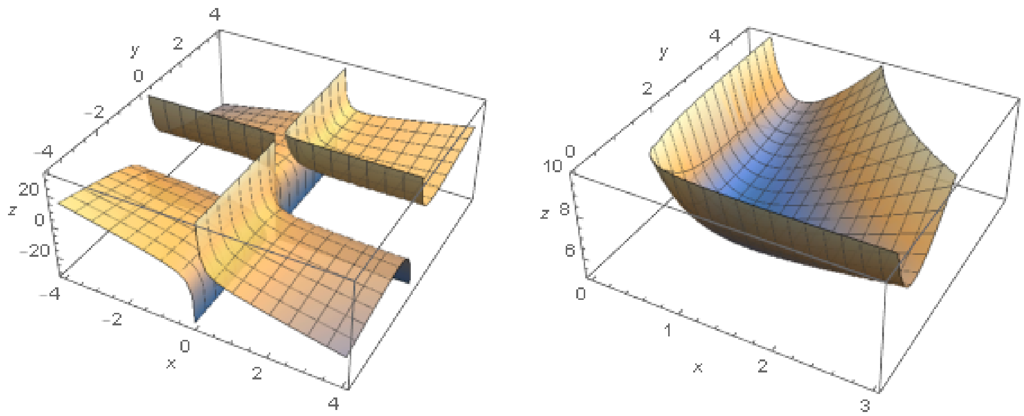
Nyt

$$D^2 f(1,2) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ja

$$\det[D^2 f(1,2)] = 4 - 1 > 0 \quad \text{ja} \quad \partial_{xx} f(1,2) = 4 > 0$$

Piste $(1,2)$ on siis funktion f ainoa kriittinen piste ja lokaali minimi. Minimi ei ole globaali, sillä f ei ole alhaalta rajoitettu.



Kuva 5: Oikealla funktion f graafi, vasemmalla minimi lähempää