Harjoitus 4, ratkaisuehdotukset

1.

$$\begin{aligned}\nabla(fg) &= (\partial_1(fg), \ldots, \partial_n(fg)) = (f\partial_1 g + g\partial_1 f, \ldots, f\partial_n g + g\partial_n f)\\ &= f(\partial_1 g, \ldots, \partial_n g) + g(\partial_1 f, \ldots, \partial_n f) = f\nabla g + g\nabla f\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla(1/f) &= (\partial_1(1/f), \ldots, \partial_n(1/f)) = (-\partial_1 f/f^2, \ldots, -\partial_n f/f^2)\\ &= -(1/f^2)(\partial_1 f, \ldots, \partial_n f) = -\nabla f/f^2\end{aligned}$$

2.

Gradientti :

$$\begin{aligned}\nabla f &= \nabla(x^2e^{xy+z}) = (\partial_1(x^2e^{xy+z}), \partial_2(x^2e^{xy+z}), \partial_3(x^2e^{xy+z}))\\ &= (2xe^{xy+z} + yx^2e^{xy+z}, x^3e^{xy+z}, x^2e^{xy+z})\end{aligned}$$

Gradientti pisteessä $P = (3, 0, -1)$:

$$\nabla f(P) = e^{-1}(6, 27, 9)$$

Suunnattu derivaatta vektorin $u = (2/3, 2/3, 1/3)$ suuntaan pisteessä P: (huom. tehtäväpaperissa u:n viimeinen koordinaatti väärä)

$$\nabla f(P) \cdot u = e^{-1}(6, 27, 9) \cdot (2/3, 2/3, 1/3) = e^{-1}(4 + 18 + 3) = e^{-1}25$$

3.

Huom. tehtävänannossa virhe viimeisessä yhtalossa: $f'(x)$ pitaisi olla $f'(g(x))$.

$$\begin{aligned}\partial_u(f \circ g) &= \nabla(f \circ g) \cdot u = (\partial_1(f \circ g), \ldots, \partial_n(f \circ g)) \cdot u = ((\partial_1 g)f' \circ g, \ldots, (\partial_n g)f' \circ g) \cdot u\\ &= (f' \circ g)(\partial_1 g, \ldots, \partial_n g) \cdot u = (f' \circ g)\nabla g \cdot u = (f' \circ g)\partial_u g\end{aligned}$$

Yllä oleva pätee kun g on maaritelty avoimessa ympäristossa $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Kun $n = 3$, $g(x) = \|x\|$, $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $f(z) = e^z$:

$$\partial_u e^{\|x\|} = \partial_u(f \circ g)(x) = f'(g(x))\nabla g(x) \cdot u = e^{\|x\|}\frac{x}{\|x\|} \cdot (1, 0, -1)/\sqrt{2} = \frac{e^{\|x\|}}{\|x\|}(x_1 - x_3)/\sqrt{2}$$

4.

Etsitaan lineaarikuvausta L joka toteuttaa

$$T(x_0 + h) - T(x_0) = Lh + \|h\|\epsilon(x_0, h)$$

kaikilla $h \in \mathbb{R}^3$ jollain virhetermilla $\epsilon(x_0, h)$ jolle $\epsilon(x_0, h) \longrightarrow 0$, kun $h \longrightarrow 0$. Tällöin derivaatta on $DT(x_0) = L$. Nyt

$$T(x_0 + h) - T(x_0) = T(x_0) + T(h) - T(x_0) = T(h),$$

Joten $\epsilon(x, h) = 0$ ja $L = T$ toteuttaa ehdon ja saadaan $DT(x_0) = T$ kaikissa pisteissa x_0. Kuvauksen matriisi on $[1, -2, 1]$ koska pätee

$$Th = h_1 - 2h_2 + h_3 = [1, -2, 1][h_1, h_2, h_3]^T$$

5.

Osittaisderivaatat:

$$\begin{aligned}\partial_1 f(x) &= 3x_2x_3\\ \partial_2 f(x) &= 3x_1x_3\\ \partial_3 f(x) &= 3x_1x_2\end{aligned}$$

Näistä saadaan gradientti,

$$\nabla f(x) = (3x_2x_3, 3x_1x_3, 3x_1x_2)$$

Osoitetaan, etta f on differentioituva. Halutaan etta

$$f(x+h) - f(x) = \nabla f(x) \cdot h + \|h\|\epsilon(h,x)$$

missa $\epsilon(h,x) \longrightarrow 0$ kun $h \longrightarrow 0$. Nyt

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= 3(x_1+h_1)(x_2+h_2)(x_3+h_3) - 3x_1x_2x_3 \\ &= 3h_1x_2x_3 + 3x_1h_2x_3 + 3x_1x_2h_3 + 3h_1h_2x_3 + 3x_1h_2h_3 + 3h_1x_2h_3 + 3h_1h_2h_3 \\ &= \nabla f(x) \cdot h + \|h\|\epsilon(h,x) \end{aligned}$$

kun

$$\epsilon(h,x) = 3\frac{h_1h_2x_3 + x_1h_2h_3 + h_1x_2h_3 + h_1h_2h_3}{\|h\|}$$

osoitetaan etta $\epsilon(h,x) \longrightarrow 0$ kun $h \longrightarrow 0$. Schwartzin epäyhtalösta saadaan $|h_j| \leq \|h\|$, kaikille $j = 1, 2, \ldots, n$. Erityisesti $|h_j|/\|h\| \leq 1$. Siispä

$$\begin{aligned} |\epsilon(h,x)| &\leq 3\frac{|h_1||h_2||x_3| + |x_1||h_2||h_3| + |h_1||x_2||h_3| + |h_1||h_2||h_3|}{\|h\|} \\ &\leq 3(|h_2||x_3| + |x_1||h_2| + |h_1||x_2| + |h_1||h_2|) \longrightarrow 0, \text{ kun } h \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

koska $|h_j| \leq \|h\| \longrightarrow 0$.