Vektorianalyysi I

HARJOITUS 6

1. Olkoon $I = [0,2] \times [0,1]$. Laske integraali $\iint\limits_I f du$ kun

$$f(x;y) = x + 2y.$$

Ratkaisut:

Välistä $I = [a,b] \times [c,d]$, huomataan, että $x \in [a,b]$ ja $y \in [c,d]$ ja integraali on muodossa

$$\int\limits_I f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\ dy\ dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\ dx\ dy.$$

Joten laskemalla integraalin saadaan:

$$\int_0^1 \int_0^2 f(x,y)\ dx\ dy = \int_0^1 \int_0^2 (x+2y)\ dx\ dy = \int_0^1 (\frac{x^2}{2} + 2xy)\Big|_0^2\ dy =$$

$$= \int_0^1 (2+4y)\ dy = 2y + 2y^2\Big|_0^1 = 2 + 2 = 4.$$

2. Laske

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} f\ dx\ dy$$

kun $f(x,y) = 1 - x - y$, kun $x + y \leq 1$ ja $f(x,y) = 0$ muulloin.

Ratkaisut:

$x + y \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq y \leq 1 - x;$

$f(x,y) = 0$ mulloin $\quad 0 \leq x \leq 1.$

Tällöin laskemalla integraalin saadaan:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y)\ dy\ dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)\ dy\ dx =$$

$$= \int_0^1 (y - xy - \frac{y^2}{2})\Big|_0^{1-x} \, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 1 - 2x + x^2 \, dx = \frac{1}{2}(x - x^2 + \frac{x^3}{3})\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

3. Osoita, että

$$\int_{[0,1]\times[1,2]} (x+y)^{-2} \, dxdy = ln\left(\frac{4}{3}\right).$$

Ratkaisut:

$$\int_1^2 \int_0^1 (x{+}y)^{-2} \, dx \, dy = \int_1^2 (-(x{+}y)^{-1})\Big|_0^1 \, dy = -\int_1^2 (1{+}y)^{-1} {-} y^{-1} \, dy = -ln(1{+}y){+}ln(y)\Big|_1^2 =$$

$$= ln\left(\frac{y}{1+y}\right)\Big|_1^2 = ln\left(\frac{2}{3}\right) - ln\left(\frac{1}{2}\right) = ln\left(\frac{2\cdot 2}{3}\right) = ln\left(\frac{4}{3}\right).$$

4. Osoita, että

$$\int_{\{(x,y)|\ \sqrt{x^2+y^2}\leq 1\}} x^2y^2 dxdy = \frac{\pi}{24}.$$

Ratkaisut:

Siirrytään napakoordinaatteihin:

$$\begin{cases} x(r,\theta) = r\cos\theta \\ y(r,\theta) = r\sin\theta. \end{cases}$$

Nyt integroinnin rajat pitää myös muuttaa. Koska alueena on $x^2 + y^2 \leq 1$, niin $r^2 \leq 1$. Täten laitetaan r väille $[0, 1]$. Vastaavasti napakoordinaattimuunnoksessa θ tulkitaan kulmana. Koska integrointialueena on koko yksikköympyrä, annetaan tämän kulman θ kulkea koko matkansa eli $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Jakobin determinantti on r ja x^2y^2 korvataan seuraavasti:

$$x^2 = r^2\cos^2\theta,\ y^2 = r^2\sin^2\theta.$$

Täten integrointi suoritetaan seuraavasti:

$$\iint_A x^2y^2\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r{\cdot}r^4\cos^2\theta\sin^2\theta\,drd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^5\cos^2\theta\sin^2\theta\,drd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{r^6}{6}\cos^2\theta\sin^2\theta\right)\Big|_0^1\,d\theta = \frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)\,d\theta = \frac{1}{6}\int_0^{2\pi} sin^2\theta - \sin^4\theta\,d\theta$$

$$*\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\theta\ d\theta = \tfrac{\theta}{2} - \tfrac{\cos\theta\sin\theta}{2}\Big|_0^{2\pi} = \pi.$$

$$*\int\limits_0^{2\pi}\sin^4\theta\ d\theta = -\tfrac{\cos\theta\sin^2\theta}{4}\Big|_0^{2\pi} + \tfrac{3}{4}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\theta\ d\theta = \tfrac{3}{4}\pi.$$

Joten sijoittamalla saadaan:

$$\frac{1}{6}\int_0^{2\pi} sin^2\theta - \sin^4\theta\ d\theta = \frac{1}{6}\left(\pi - \frac{3}{4}\pi\right) = \frac{1}{6}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{24}.$$

5. Laske integraali

$$\int_1^2\int_3^x\int_0^{\sqrt{3}y}\frac{y}{y^2+z^2}\ dzdydx$$

Ratkaisut:

Tehdään sijoitus:

$$u = \frac{z}{y} \implies z = uy.$$

$$du = \frac{dz}{y}. \implies dz = y\ du.$$

Joten sijoittamalla saadaan:

$$\int_1^2\int_3^x\int_0^{\sqrt{3}y}\frac{y\cdot y\ du}{y^2+u^2y^2}\ dy\ dx = \int_1^2\int_3^x\int_0^{\sqrt{3}y}\frac{y^2\ du}{y^2+u^2y^2}\ dy\ dx =$$

$$\int_1^2\int_3^x\int_0^{\sqrt{3}y}\frac{du}{1+u^2}\,dy\,dx = \int_1^2\int_3^x \arctan u\Big|_0^{\sqrt{3}y}\,dy\,dx = \int_1^2\int_3^x \arctan\left(\frac{z}{y}\right)\Big|_0^{\sqrt{3}y}\,dy\,dx$$

$$= \int_1^2 \int_3^x \arctan(\sqrt{3}) - \arctan(0)\; dy\, dx = \int_1^2 \int_3^x \frac{\pi}{3}\; dy\, dx = \int_1^2 \frac{\pi}{3} y \bigg|_3^x dx = \int_1^2 \frac{\pi}{3} x - \pi\; dx$$

$$= \frac{\pi x^2}{6} - \pi x \bigg|_1^2 = \frac{4\pi}{6} - 2\pi - \frac{\pi}{6} + \pi = -\frac{\pi}{2}.$$

6. Laske kappaleen tilavuus, jota rajoittavat pinnat $z = x^2 + y^2,\ z = 0$ ja $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

Ratkaisut.

Katsotaan rajat:

$$0 \leq z \leq x^2 + y^2.$$

Siirrytään napakoordinaatteihin:

$$\begin{cases} x(r, \theta) = r \cos \theta \\ y(r, \theta) = r \sin \theta. \end{cases}$$

Koska integrointialueena on koko yksikköympyrä, annetaan tämän kulman θ kulkea koko matkansa eli $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$x^2 + (y-1)^2 = 1 \implies x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1 \implies x^2 + y^2 = 2y \implies r^2 = 2y.$

y:n paikalle sijoitetaan $y = r \sin \theta$, joten saadaan:

$$r^2 = 2r \sin \theta \implies r = 2 \sin \theta,$$

eli $0 \leq r \leq 2 \sin \theta$.

Lasketaan nyt tämä integraali näillä rajoilla:

$$\iint_A \int_0^{x^2+y^2} 1\; dz\; dx\; dy = \iint_A x^2 + y^2\; dx\; dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\sin\theta} r^2 \cdot r\; dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{r^4}{4} \bigg|_0^{2\sin\theta} d\theta = 4 \int_0^{2\pi} \sin^4 \theta\; d\theta = 4 \cdot \frac{3\pi}{4} = 3\pi.$$