

HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus logiikkaan I, syksy 2018
Harjoitus 6 – Ratkaisuehdotukset

1. Anna luonnollinen päättely lauseelle $A \wedge (B \vee C)$ lauseista A ja $A \rightarrow C$.

Ratkaisu:

$$\frac{A \quad \frac{A \rightarrow C \quad A}{C} \rightarrow E}{\frac{A \quad \frac{C}{B \vee C} \vee T}{A \wedge (B \vee C)} \wedge T}$$

2. Anna luonnollinen päättely lauseelle $\neg\neg A$ lauseesta A .

Ratkaisu:

$$\frac{A \quad [\neg A]^1}{\frac{A \wedge \neg A}{\neg\neg A} \wedge T, 1} \neg T, 1$$

3. Anna luonnollinen päättely lauseelle $A \rightarrow B$ lauseesta $\neg B \rightarrow \neg A$.

Ratkaisu:

$$\frac{[A]^2 \quad \frac{\neg B \rightarrow \neg A \quad [\neg B]^1}{\neg A} \rightarrow E}{\frac{A \wedge \neg A}{\neg\neg B} \wedge T, 1} \neg T, 1$$

$$\frac{\neg\neg B}{B} \neg E$$

$$\frac{B}{A \rightarrow B} \rightarrow T, 2$$

4. Anna luonnollinen päättely lauseelle $\neg(\neg B \wedge \neg C)$ lauseesta $A \wedge (B \vee C)$.

Ratkaisu:

$$\frac{\frac{A \wedge (B \vee C)}{B \vee C} \wedge E \quad \frac{[B]^3 \quad \frac{[\neg B \wedge \neg C]^1}{\neg B} \wedge E}{B \wedge \neg B} \wedge T}{\neg(\neg B \wedge \neg C)} \neg T, 1 \quad \frac{[C]^3 \quad \frac{[\neg B \wedge \neg C]^2}{\neg C} \wedge E}{C \wedge \neg C} \wedge T}{\neg(\neg B \wedge \neg C)} \neg T, 2}{\neg(\neg B \wedge \neg C)} \vee E, 3$$

5. Anna luonnollinen päättely lauseelle $(A \vee B) \leftrightarrow C$ lauseista $A \rightarrow C$ ja $B \leftrightarrow C$.

Ratkaisu:

$$\frac{[A \vee B]^2 \quad \frac{A \rightarrow C \quad [A]^1}{C} \rightarrow E \quad \frac{B \leftrightarrow C \quad [B]^1}{C} \leftrightarrow E \quad \frac{B \leftrightarrow C \quad [C]^2}{B} \leftrightarrow E}{\frac{C \quad \frac{B}{A \vee B} \vee T}{(A \vee B) \leftrightarrow C} \leftrightarrow T, 2} \vee E, 1$$

6. Anna luonnollinen päättely lauseelle $\neg A \wedge \neg B$ lauseesta $\neg(A \vee (\neg A \rightarrow B))$.

Ratkaisu:

$$\frac{\frac{[A]^1}{A \vee (\neg A \rightarrow B)} \vee T \quad \neg(A \vee (\neg A \rightarrow B))}{(A \vee (\neg A \rightarrow B)) \wedge \neg(A \vee (\neg A \rightarrow B))} \wedge T \quad \frac{\frac{[B]^2}{\neg A \rightarrow B} \rightarrow T \quad \neg(A \vee (\neg A \rightarrow B))}{(A \vee (\neg A \rightarrow B)) \wedge \neg(A \vee (\neg A \rightarrow B))} \wedge T}{\frac{\neg A \quad \neg B}{\neg A \wedge \neg B} \wedge T} \neg T, 1 \quad \neg T, 2$$

7. Voiko luonnollisella päättelyllä päätellä lausetta $\neg p_0 \vee p_2$ lauseista $p_0 \rightarrow p_1$ ja $p_0 \rightarrow (\neg p_1 \rightarrow p_2)$?

Ratkaisu: Ei voi. Luonnollisen päättelyn järjestelmä on eheä, joten johtopäätöksen on oltava oletusten looginen seuraus. Valitsemalla totuusjakauma v , jolle $v(p_0) = 1$, $v(p_1) = 1$ ja $v(p_2) = 0$, nähdään, että $v(p_0 \rightarrow p_1) = 1$ ja $v(p_0 \rightarrow (\neg p_1 \rightarrow p_2)) = 1$ mutta $v(\neg p_0 \vee p_2) = 0$. Siten lause $\neg p_0 \vee p_2$ ei ole lauseiden $p_0 \rightarrow p_1$ ja $p_0 \rightarrow (\neg p_1 \rightarrow p_2)$ looginen seuraus.