

## Johdatus logiikkaan II

### Harjoitus 1

Joissain alla olevista tehtävistä on luonnollista käyttää aakkostoa, joka sisältää myös funktiosymboleita.

1. Olkoon  $R$  kaksipaikkainen relaatiot symboli,  $f$  yksipaikkainen funktiosymboli, aakkosto  $L = \{R, f\}$  ja  $M = \mathbf{Z}^2$ , missä  $\mathbf{Z}$  on kokonaislukujen joukko. Onko  $\mathbf{M} = (M, R^{\mathbf{M}}, f^{\mathbf{M}})$   $L$ -malli kun

(a)  $R^{\mathbf{M}} = \{(x, y), (a, b) \mid x, y, a, b \in \mathbf{Z}, x + y = a + b\}$  ja  $f^{\mathbf{M}} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{Z}, y = x + 1\}$ ,

(b)  $R^{\mathbf{M}} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{Z}, y = x + 1\}$  ja  $f^{\mathbf{M}} = \{(x, y), (a, b) \mid x, y, a, b \in \mathbf{Z}, x + y = a + b\}$ .

2. Ajatellaan että Partakylästä on tehty parranajotietokanta  $P$ . Jokaisesta kyläläisestä tietokantaan on laitettu yksi tietue. Tämä tietue koostuu tunnisteesta, tiedosta henkilön sukupuolesta, tiedon onko kyseinen henkilö parturi vai ei ja tiedon siitä kuka ajaa kyseisen henkilön parran eli sen henkilön tunnisteesta, joka toimenpiteen suorittaa. Miten esittäisit tämän tiedoston monisteen luvun 1 mukaisena struktuurina? Mikä on aakkosto?

3. Olkoot  $\mathbf{Z}$ ,  $R$  ja  $R^{\mathbf{M}}$  kuten tehtävässä 1 (b) ja  $\mathbf{M} = (\mathbf{Z}, R^{\mathbf{M}})$ . Olkoon  $\text{Aut}(\mathbf{M})$  niiden bijektioiden  $g : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$  joukko joilla pätee että kaikilla  $x, y \in \mathbf{Z}$ ,  $(x, y) \in R^{\mathbf{M}}$  jos ja vain jos  $(g(x), g(y)) \in R^{\mathbf{M}}$  (eli  $\text{Aut}(\mathbf{M})$  on struktuurin  $\mathbf{M}$  automorfismien joukko, näihin palataan kurssilla myöhemmin). Tarkastellaan tätä joukkoa ryhmänä eli varustetaan se laskutoimituksella joka on funktioiden yhdistäminen. Miten esittäisit tämän rakenteen monisteen luvun 1 mukaisena struktuurina? Mikä on aakkosto?

4. Tutustu Wikipedian artikkeliin ”Hila (matematiikka)”. Miten valitsisit aakkoston hiloille? Anna esimerkki hilasta esitettynä monisteen luvun 1 mukaisena struktuurina. Huomaa, että artikkeli näyttää ehdottavan vaihtoehtoisia aakkostoja. Pohdi syitä tälle.

5. Tutustu Wikipedian artikkeliin ”Affine plane (incidence geometry)”. Miten valitsisit aakkoston affineille tasoille? Anna esimerkki affiinista tasosta esitettynä monisteen luvun 1 mukaisena struktuurina.

6. Tarkastellaan 10 metriä kertaa 10 metriä olevan alan laatoitusta 1 metri kertaa 1 metri olevilla laatoilla. Laattoja on kolmea väriä: mustia, valkoisia ja punaisia. Miten esittäisit tämän rakenteen monisteen luvun 1 mukaisena struktuurina? Mikä on aakkosto?