Topologi Ib
Kandidatprogrammet i matematiska vetenskaper
Hösten 2018
Övning 1

Vi fortsätter med samma principer som under kursen Topologi Ia - varje vecka ger 2–3 lösta uppgifter +1/2 p, och 4–6 lösta uppgifter ger +1 p. Påminnelseuppgifterna räknas inte in.

Påminnelseuppgift 1. Låt (X, d) vara ett metriskt rum och $A \subset X$ en mängd. Visa att A är öppen i X om och endast om $d(x, A^c) > 0$ för alla $x \in A$ (där A^c är komplementet av A i X).

Påminnelseuppgift 2. Försäkra dig om att du kan bevisa att mängden $]0, 1]\times]0, 1]$ är sluten i mängden $]0, \infty[\times]0, \infty[\subset \mathbb{R}^2$.

Påminnelseuppgift 3. Försäkra dig om att du kan bevisa att om $A \subset X$ är en delmängd och $f : X \to Y$ är en kontinuerlig funktion, så är $f|_A : A \to Y$ kontinuerlig.

Påminnelseuppgift 4. Varför garanterar "$f|_A : A \to Y$" inte att $f : X \to Y$ är kontinuerlig i alla punkter i A?

Egentliga uppgifter:

Uppgift 1. Är följande mängder $A \subset \mathbb{R}^2$ öppna i den slutna kulan $\overline{B}(\bar{0}, 1)$?

(a) $A = \{(x, y) \in \overline{B}(\bar{0}, 1) : xy > 0\}$,
(b) $A = \{(x, y) \in \overline{B}(\bar{0}, 1) : x \geq 0\}$?

Uppgift 2. Antag att $A \subset_c \mathbb{R}^3$ och $U \subset_o \mathbb{R}^3$.

(a) Är $U \times \{0\} \subset \mathbb{R}^4$ öppen?
(b) Är $A \times \{0\} \subset \mathbb{R}^4$ sluten?

Uppgift 3. Visa att om $E \subset_c A \subset_c X$ så gäller $E \subset_c X$.

Uppgift 4. Ge ett exempel på en funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ med egenskapen att det finns en mängd $A \subset \mathbb{R}^2$ så att

- $f|_A : A \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i A,
- $f|_{\mathbb{R}^2\setminus A} : \mathbb{R}^2\setminus A \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i $\mathbb{R}^2\setminus A$ och
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är diskontinuerlig i alla punkter $x \in \mathbb{R}^2$.

Uppgift 5. Antag att $X = A \cup B$, $V \subset A \cap B$, $V \cap A \overset{\circ}{\subset} A$ och $V \cap B \overset{\circ}{\subset} B$. Visa att $V \overset{\circ}{\subset} X$.

Uppgift 6. Ge exempel på sådana mängder $A, B, V \subset \mathbb{R}$ att $\mathbb{R} = A \cup B$, $V \cap A \overset{\circ}{\subset} A$, $V \cap B \overset{\circ}{\subset} B$ men V inte är öppen i $\mathbb{R}$.