Vektorianalyysi II (MAT21020), syksy 2018
Laskuharjoitus 1
Ryhmä 1: To 8.11., klo 14:15–16:00 (Exactum, C321)
Ryhmä 2: Ti 6.11., klo 14:15–16:00 (Exactum, B321)
Ryhmä 3: Ke 7.11., klo 14:15–16:00 (Exactum, B322)

---

1. Tarkastellaan vektorifunktioita
$$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{ja} \quad K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,$$
missä
$$L(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_2) \quad \text{ja} \quad K(x_1, x_2) = (3x_2, x_1, x_2 - x_1).$$
Osoita, että vektorifunktiot
$$L, \quad K \quad \text{ja} \quad K \circ L$$
ovat differentioituvia joukossa $\mathbb{R}^2$. Etsi myös derivaatat
$$DL(x_0), \quad DK(x_0) \quad \text{ja} \quad D(K \circ L)(x_0)$$
pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}^2$.

2. Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko. Oletetaan, että kuvaukset
$$f, g : U \to \mathbb{R}^m$$
ovat differentioituvia pisteessä $x_0 \in U$. Osoita, että tällöin funktio $f \cdot g : U \to \mathbb{R}$,
$$(f \cdot g)(x) := (f(x) \,|\, g(x))$$
on differentioituva pisteessä $x_0 \in U$. Osoita lisäksi, että jokaiselle vektorille $h \in \mathbb{R}^n$ pätee
$$D(f \cdot g)(x_0)h = \big(Df(x_0)h \,|\, g(x_0)\big) + \big(f(x_0) \,|\, Dg(x_0)h\big)\,.$$

3. Tarkastellaan normikuvausta $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \|x\|.$$

(a) Osoita, että funktiolla f on pisteessä $x_0 \neq 0$ suuntaisderivaatta
$$\partial_e f(x_0) = \frac{(x_0 \,|\, e)}{\|x_0\| \, \|e\|}$$
vektorin $e \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ suuntaan.

(b) Osoita lisäksi, että funktiolla f ei ole origossa suuntaisderivaattaa mihinkään suuntaan.

4. Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $L \geq 0$. Oletetaan, että
$$f : U \to \mathbb{R}^m$$
on *L-Lipschitz-kuvaus*, eli toisin sanoen
$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$$
kaikilla $x, y \in U$. Osoita, että jos f on differentioituva pisteessä $x_0 \in U$, niin tällöin
$$|||Df(x_0)||| \leq L,$$
missä $|||\cdot||| : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) \to [0, \infty)$ on kuvausnormi.

5. Osoita, että differentioituva kuvaus on jatkuva.

6. Olkoon $g : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$, jatkuva funktio, joka ei ole differentioituva missään pisteessä. Konstruoi funktion g avulla esimerkki jatkuvasta injektiosta $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, joka ei ole differentioituva missään pisteessä $x \in \mathbb{R}^n$.