Topologi Ib
Kandidatprogrammet i matematiska vetenskaper
Hösten 2018
Övning 2

Tilläggspoäng: varje vecka ger 2–3 lösta uppgifter +1/2 p, och 4–6 lösta uppgifter ger +1 p. Påminnelseuppgifterna räknas inte in.

Påminnelseuppgift 1. Övertyga dig om att du kan bevisa följande: Om (X, d) är ett metriskt rum och $A \subset X$ så är

(a) A öppen i X om och endast om $A \cap \partial A = \emptyset$,
(b) A sluten i X om och endast om $\partial A \subset A$.

Påminnelseuppgift 2. Övertyga dig om att du kan visa att $(0, \infty) \approx \mathbb{R}$.

Påminnelseuppgift 3. Övertyga dig om att du kan visa att en Lipschitz-funktion är kontinuerlig.

Egentliga uppgifter:

Uppgift 1. Visa att en avbildning $f : X \to Y$ mellan metriska rum är kontinuerlig om och endast om $f^{-1}[\mathrm{int}B] \subset \mathrm{int} f^{-1}B$ för varje mängd $B \subset Y$.

Uppgift 2. Antag att A är en delmängd i det metriska rummet X.

(a) Visa att $\partial\partial A \subset \partial A$.
(b) Ge exempel på ett fall där $\partial\partial A \neq \partial A$.

Uppgift 3. Visa att

(a) $X \approx X$,
(b) om $X \approx Y$ så gäller $Y \approx X$,
(c) om $X \approx Y \approx Z$ så gäller $X \approx Z$,

för alla metriska rum X, Y, Z (gäller mer allmänt för alla topologiska rum).

Uppgift 4. Bevisa att om $f : X \approx Y$ och $A \subset X$, så gäller

(a) $\overline{fA} = f\overline{A}$,
(b) $\partial fA = f\partial A$.

Uppgift 5. Antag att $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig och att $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ är grafen $\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ för f. Metriken i Γ är den som induceras av den valiga metriken i planet. Visa att $\Gamma \approx \mathbb{R}$.

Uppgift 6. Antag att $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig. Visa att ekvationen

$$f(x, y) = (x, y + g(x)), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

definierar en homeomorfism $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ och bestäm formeln för f^{-1}.