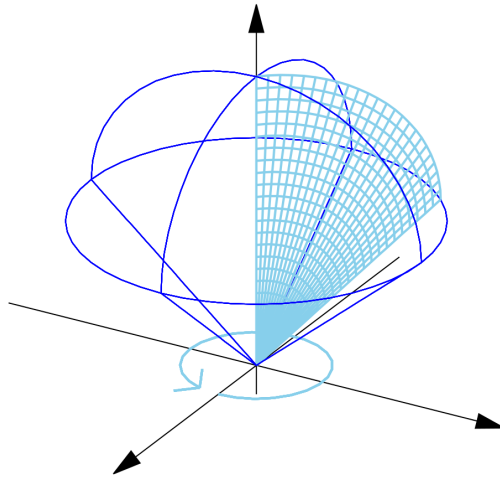


Vektorianalyysi II

MAT21020

Luennoitsija: Ritva Hurri-Syrjänen
Luentoajat: ke: 10:15-12:00, to: 12:15-14:00
Helsingin yliopisto

4. huhtikuuta 2018



Sisältö

RHS:n luennoista	3
5 Kertausta vektorifunktioista	4
6 Vektorifunktioiden derivaatat	6
<i>Määritelmä 6.1:</i> Kuvauksen derivaatta ja differentioituvuus pisteessä x_0	6
<i>Määritelmä 6.2:</i> Differentioituva kuvaus	6
<i>Lause 6.4:</i> Pisteessä x_0 differentioituva kuvaus on jatkuva samassa pisteessä	6
<i>Määritelmä 6.7:</i> Affiini kuvaus	6
7 Derivoimissääntöjä	9
<i>Lause 7.1:</i> Summafunktion differentioituvuus	9
<i>Lause 7.3:</i> Tulofunktion differentioituvuus	9
<i>Korollaari 7.4:</i> Vakiolla kerrotun funktion differentioituvuus	9
<i>Lause 7.6:</i> Sisätulon differentioituvuus	10
<i>Lause 7.7:</i> Ketjusääntö	10
8 Suunnattu derivaatta ja osittaisderivaatta	13
<i>Määritelmä 8.1:</i> Suunnattu derivaatta	13
<i>Määritelmä 8.5:</i> Osittaisderivaatat	14
9 Jacobin matriisi	16
<i>Määritelmä 9.3:</i> Jacobin matriisi	16
<i>Määritelmä 9.6:</i> Jacobin determinantti	17
10 Differentioituvuudesta	19
<i>Määritelmä 10.3:</i> Jatkuvasti differentioituva kuvaus	19
10.7 Yhteenvedo	20
11 Yhden muuttujan vektoriarvoiset kuvaukset	21
11.4 Jatkuvasti differentioituvat polut	21
11.12 Paloittain säännöllisistä poluista	25
12 Käänteiskuvauslause	27
<i>Lause 12.1:</i> Lokaali injektiivisyys	27
<i>Lause 12.5:</i> Käänteiskuvauslause	29
<i>Määritelmä 12.7:</i> Diffeomorfismi	29
13 Ääriarvotehtävistä	31
<i>Lause 13.3:</i> Lagrangen kertojien menetelmä	31
13.5 Geometrista perustelua	32
14 Avaruuden \mathbb{R}^n pinnoista	34
14.13 Implisiittisesti määritellyistä pinnoista	38
15 Yleistä ääriarvotehtävistä	40
15.1 A on kompakti joukko	40
15.4 A ei ole kompakti joukko	42

16 Riemannin integraalista	45
16.1 Kertausta	45
16.2 Riemannin integraali avaruudessa \mathbb{R}^n	47
16.3 Iteroiduista integraaleista	50
16.11 Integraalin ominaisuuksia funktion suhteen	55
16.12 Nollajoukon käsite	56
<i>Lause 16.13: Additiivisuus joukon suhteen</i>	56
16.15 Muuttujanvaihtokaava (karkeasti)	57
16.16 Muuttujanvaihtolause tarkemmin	58
16.18 Sylinterikoordinaattikuvaus avaruudessa \mathbb{R}^3	59
16.19 Pallokoordinaattikuvaus avaruudessa \mathbb{R}^3	60
17 Epäoleellisista integraaleista	64
17.1 Integraali yli avaruuden \mathbb{R}^n , $n \geq 2$	64
<i>Lause 17.2: Iteroitu integraali</i>	66
18 Käyräintegraalista	67
18.1 Reaaliarvoisen funktion käyräintegraali	67
18.2 Vektorikentän käyräintegraali	68
19 Analyysin peruslause ja sen moniulotteisia vastineita	71
Kertausta kurssikokeeseen	73
20 Roottori ja divergenssi	78
21 Reaaliarvoisen funktion pintaintegraali	79
22 Vektorikentän pintaintegraali	80
23 Stokesin lause	81
24 Gaussin lause (Divergenssilause)	83
Viitteet	85

RHS:n luennoista

Luennot sisältävät euklidisessa avaruudessa \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, määriteltyjen vektoriarvoisten vektorifunktioiden differentiaalilaskennan ja integraalilaskennan perusteita.

Luentojen runko seuraa Olli Martion kirjaa. Luentoja tehdessäni olen käyttänyt Veikko T. Purmosen luentomonisteita ”Differentialilaskentaa euklidisissa avaruuksissa”, ”Differentialilaskentaa 2”, ”Integraalilaskenta 1” ja ”Integraalilaskenta 2”, omia ”Differentialilaskenta” luentoja ja James Stewartin kirjaa ”Calculus. Early Transcendentals.”

Suurkiitos Outi Bomanille, Ilmari Lehmusoksalle ja Heli Virtaselle luentojen \LaTeX :lla kirjoittamisesta ja Toivo Kiiskelle painovirheiden etsimisestä. Ilmarille suurkiitos myös kuvien todella taidokkaasta piirtämisestä!

Kiitos luennoille osallistuneille.

Helsingissä 14.12.2017

Ritva Hurri-Syrjänen

5 Kertausta vektorifunktioista

Kurssi on tavallaan kuvausten teoriaa. Kertaamme ensin tuloksia jatkuvista kuvauksista ja raja-arvoista.

5.1 Kuvauksen $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$,

lähtö(joukko) on A ,

maali(joukko) on \mathbb{R}^m ,

kuva(joukko) on $f(A)$.

Kuvaus $f : A \rightarrow B$, $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$, on

- (a) vektorifunktio, jos $n > 1$ tai $m > 1$, ja erityisesti
- (b) vektoriarvoinen, jos $m > 1$,
- (c) reaaliarvoinen, jos $m = 1$.

5.2 Kuvaus $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$, on jatkuva pisteessä $x \in A$, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$\|f(y) - f(x)\| < \varepsilon, \quad \text{kun } \|y - x\| < \delta, y \in A.$$

Kuvaus f on jatkuva, jos se on jatkuva jokaisessa pisteessä $x \in A$.

5.3 Kuvaus $f = (f_1, \dots, f_m) : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = f_1(x)e_1 + f_2(x)e_2 + \dots + f_m(x)e_m$$

kaikilla $x \in A$, missä $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ on avaruuden \mathbb{R}^m kanta, on jatkuva pisteessä $x \in A$ (vastaavasti joukossa A), jos ja vain jos jokainen komponenttifunktio $f_k : A \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, m$, on jatkuva pisteessä $x \in A$ (vastaavasti joukossa A).

Esimerkki 5.4 Olkoon $f = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(x_1, x_2) = (2x_1, x_1 + 5x_2, 4x_1 - x_2).$$

Silloin komponenttifunktiot ovat

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \mapsto 2x_1$$

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \mapsto x_1 + 5x_2$$

$$f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \mapsto 4x_1 - x_2.$$

5.5 Kuvauksella $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ on raja-arvo $b \in \mathbb{R}^m$ joukon A kasautumispisteessä a , merkitään

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = b,$$

jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$\|f(x) - b\| < \varepsilon, \quad \text{kunhan } 0 < \|x - a\| < \delta, x \in A.$$

5.6 Kuvauksella $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$, on raja-arvo $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ pisteessä a , jos ja vain jos

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f_j(x) = b_j, \quad \text{kaikilla } j = 1, \dots, m.$$

5.7 Jos $x \in A$ ei ole erillinen piste, niin silloin kuvaus $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$, on jatkuva pisteessä x , jos ja vain jos

$$\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in A}} f(y) = f(x).$$

Huomautus: Funktio on aina jatkuva erillisessä pisteessä.

6 Vektorifunktioiden derivaatat

Määritelmä 6.1: Kuvauksen derivaatta ja differentioituvuus pisteessä x_0 . Olkoon \mathcal{G} avoin joukko avaruudessa \mathbb{R}^n . Kuvaus $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^m$ on differentioituva pisteessä $x_0 \in \mathcal{G}$, jos on olemassa kuvaus $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ siten, että

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + \|h\| \varepsilon(h), \quad x_0 + h \in \mathcal{G},$$

missä $\varepsilon(h) \rightarrow 0$, kun $h \rightarrow 0$.

Kuvaus $A = Df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ on kuvauksen f derivaatta pisteessä x_0 .

Määritelmä 6.2: Differentioituva kuvaus. Olkoon $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Kuvaus $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^m$ on differentioituva, merkitään diffva, jos kuvaus f on differentioituva jokaisessa pisteessä $x_0 \in \mathcal{G}$.

Esimerkki 6.3

- (1) Olkoon $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Olkoon $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^m$ vakiofunktio, ts. $f(x) = c \in \mathbb{R}^m$ kaikilla $x \in \mathcal{G}$. Tällöin f on diffva ja $Df(x_0) = 0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ kaikilla $x_0 \in \mathcal{G}$:

$$f(x_0 + h) = c = f(x_0) = f(x_0) + 0h + \|h\| \cdot 0, \quad x_0 + h \in \mathcal{G}.$$

- (2) Olkoon $I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $I(x) = x$, identtinen kuvaus. Tällöin I on diffva ja $DI(x_0) = I$ kaikilla $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Koska I on lineaarikuvaus, $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, niin

$$I(x_0 + h) - I(x_0) = Ih + \|h\| \cdot 0.$$

- (3) Olkoon $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineaarikuvaus. Tällöin A on diffva ja $DA(x_0) = A$ kaikilla $x_0 \in \mathbb{R}^n$:

$$A(x_0 + h) - A(x_0) = Ah + \|h\| \cdot 0.$$

Seuraava lause antaa yhteyden differentioituvuuden ja jatkuvuuden välillä; differentioituvuus on voimakkaampi ominaisuus.

Lause 6.4: Pisteessä x_0 differentioituva kuvaus on jatkuva samassa pisteessä. Olkoon $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^m$ vektorifunktio, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin, $x_0 \in \mathcal{G}$. Jos f on differentioituva pisteessä x_0 , niin f on jatkuva pisteessä x_0 .

Todistus. Kuten Vektorianalyysi I-kurssilla. □

Korollaari 6.5. Olkoon $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin, differentioituva. Tällöin f on jatkuva joukossa \mathcal{G} .

Huomautus 6.6 Funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on differentioituva pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$, jos ja vain jos f on derivoituva pisteessä x_0 . Tällöin

$$Df(x_0)h = f'(x_0)h, \quad h \in \mathbb{R}.$$

Määritelmä 6.7: Affiini kuvaus. Kuvaus $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ on affiini, jos T on lineaarikuvauksen $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ja avaruuden \mathbb{R}^m siirron yhdiste, toisin sanoen, jos

$$T(x) = Ax + b, \quad b \in \mathbb{R}^m, \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R}^n.$$

Huomautus: $T(0) = A(0) + b = 0 + b = b$.

Esimerkki 6.8

(1) Olkoon $b = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$ ja lineaarikuvaus $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ siten, että

$$\text{mat}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Silloin $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x) = Ax + b$ on affiinikuvaus, jolle

$$T(x) = y = (y_1, y_2) = (2x_1 + x_3 + 1, 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2).$$

(2) Affiinikuvaus $T = (T_1, T_2) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} T_1(x) = 3x + 1 \\ T_2(x) = -x + 2, \end{cases}$$

kuvaa reaaliakselin tason \mathbb{R}^2 suoraksi, joka kulkee pisteen $(1, 2)$ kautta. Nyt

$$\begin{cases} y_1 = 3x + 1 \\ y_2 = -x + 2, \end{cases}$$

joten suoran yhtälö on $y_1 + 3y_2 = 7$.

6.9 Kuvausmerkintä $\varepsilon(x)$ ja sanonta ε -funktio:

Kuvaus $\varphi : B^n(0, r) \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\varphi(x) := \varepsilon(x)$, on ε -funktio, kun $\|\varphi(x)\| \rightarrow 0$, kun $x \rightarrow 0$.

Esimerkki 6.10

(1) Olkoon $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 - \cos x$. Silloin φ on ε -kuvaus, sillä $\varepsilon(x) = 1 - \cos x \rightarrow 0$, kun $x \rightarrow 0$.

(2) Olkoon $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : B^2(0, r) \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \log(\|x\| - 1) \\ \varphi_2(x) &= \sin\|x\|. \end{aligned}$$

Nyt $\varphi(x) = (\log(\|x\| - 1), \sin\|x\|) = \varepsilon(x)$, sillä $\varepsilon(x) \rightarrow (0, 0)$, kun $x \rightarrow 0$.

Esimerkki 6.11 Tärkeä!

Olkoot f_1 ja $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivoituvia kuvauksia ja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$.

Osoita, että f on diffva ja derivaattaa vastava matriisi on

$$\text{mat}\left(Df(x_1, x_2)\right) = \begin{bmatrix} f_1'(x_1) & 0 \\ 0 & f_2'(x_2) \end{bmatrix}.$$

Ratkaisuehdotus. Merkitään $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Koska f_1 ja f_2 ovat derivoituvia, niin

$$\begin{aligned} f(x+h) &\stackrel{(1)}{=} f(x_1+h_1, x_2+h_2) \stackrel{(2)}{=} (f_1(x_1+h_1), f_2(x_2+h_2)) \\ &\stackrel{(3)}{=} (f_1(x_1) + f_1'(x_1)h_1 + |h_1|\varepsilon_1(h_1), f_2(x_2) + f_2'(x_2)h_2 + |h_2|\varepsilon_2(h_2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (f_1(x_1), f_2(x_2)) + (f_1'(x_1)h_1, f_2'(x_2)h_2) + (|h_1|\varepsilon_1(h_1), |h_2|\varepsilon_2(h_2)) \\
&= f(x) + Ah + \|h\|\varepsilon(h),
\end{aligned}$$

missä $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineaarikuvaus siten, että

$$\text{mat}(A) = \begin{bmatrix} f_1'(x_1) & 0 \\ 0 & f_2'(x_2) \end{bmatrix}$$

ja $\varepsilon(h) = \left(\frac{|h_1|}{\|h\|}\varepsilon_1(h_1), \frac{|h_2|}{\|h\|}\varepsilon_2(h_2) \right) \rightarrow 0$, kun $h \rightarrow 0$. Siis f on differentioituva ja

$$\text{mat}(Df(x_1, x_2)) = \begin{bmatrix} f_1'(x_1) & 0 \\ 0 & f_2'(x_2) \end{bmatrix}.$$

Kohdassa (1) sijoitetaan merkinnät, kohdassa (2) käytetään funktion määritelmää ja kohdassa (3) käytetään sitä, että funktiot f_1 ja f_2 ovat derivoituvia. Lisäksi huomaa, että $\|h\|^2 = h_1^2 + h_2^2$.

7 Derivoimissääntöjä

Lause 7.1: Summafunktion differentioituvuus. Jos $f, g : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin, ovat differentioituvia pisteessä $x_0 \in \mathcal{G}$, niin kuvaus

$$f + g : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

on differentioituva pisteessä $x_0 \in \mathcal{G}$ ja

$$D(f + g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0).$$

Siis $D(f + g)(x_0)h = Df(x_0)h + Dg(x_0)h$, $h \in \mathbb{R}^n$.

Todistus. Suoraan kehitelmällä. □

Esimerkki 7.2 Etsi kuvauksen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_2 + \sin x_1, x_1 + x_2 + \cos x_2)$ derivaatta $Df(x_1, x_2)$.

Ratkaisuehdotus. Nyt $f(x) = (x_2, x_1 + x_2) + (\sin x_1, \cos x_2)$, missä $g(x) = (x_2, x_1 + x_2)$ on lineaarinen ja $h(x) = (\sin x_1, \cos x_2)$ on Esimerkin 6.11 tyyppiä. Siis

$$\text{mat}(Dg(x)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ja

$$\text{mat}(Dh(x)) = \begin{bmatrix} \cos x_1 & 0 \\ 0 & -\sin x_2 \end{bmatrix}.$$

Siis Lauseen 7.1 nojalla summafunktio f on differentioituva ja $Df(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ ja

$$\text{mat}(Df(x)) = \begin{bmatrix} \cos x_1 & 1 \\ 1 & 1 - \sin x_2 \end{bmatrix}.$$

Siis $Df(x)h = (h_1 \cos x_1 + h_2, h_1 + h_2 - h_2 \sin x_2)$, $h \in \mathbb{R}^2$.

Lause 7.3: Tulofunktion differentioituvuus. Jos $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ ja $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin, ovat differentioituvia pisteessä $x_0 \in \mathcal{G}$, niin

$$\varphi f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^m, (\varphi f)(x) = \varphi(x)f(x),$$

on differentioituva pisteessä $x_0 \in \mathcal{G}$ ja

$$D(\varphi f)(x_0)h = (D\varphi(x_0)h)f(x_0) + \varphi(x_0)Df(x_0)h.$$

Todistus. Melkein suoraan kehitelmällä. □

Korollaari 7.4: Vakiolla kerrotun funktion differentioituvuus. Olkoon $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin.

Jos $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^m$ on differentioituva pisteessä $x_0 \in \mathcal{G}$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$, niin $\lambda f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^m$ on differentioituva pisteessä x_0 ja

$$D(\lambda f)(x_0) = \lambda Df(x_0).$$

Seuraava esimerkki on Lauseiden 7.1 ja 7.3 sovellus.

Esimerkki 7.5 Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1, x_1 x_2)$. Etsi derivaatta $Df(x)$.

Ratkaisuehdotus. Nyt $f(x_1, x_2) = x_1((1, 0) + (0, x_2)) = \varphi(x)(g(x) + h(x))$, missä

$$\begin{array}{lll} \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, & (x_1, x_2) \mapsto x_1 & \text{lineaarinen} \\ g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, & (x_1, x_2) \mapsto (1, 0) & \text{vakio} \\ h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, & (x_1, x_2) \mapsto (0, x_2) & \text{lineaarinen.} \end{array}$$

Siis

$$\begin{aligned} \text{mat}(D\varphi(x)) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{mat}(Dh(x)) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Olkoon $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. Lauseiden 7.1 ja 7.3 nojalla

$$\begin{aligned} Df(x)u &\stackrel{Dg(x)=0}{=} D\varphi(x)u(g(x) + h(x)) + \varphi(x) Dh(x)u \\ &= u_1((1, 0) + (0, x_2)) + x_1(0, u_2) \\ &= (u_1, x_2 u_1 + x_1 u_2) \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Siis

$$\text{mat}(Df(x)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix}.$$

Lause 7.6: Sisätulon differentioituvuus. Jos $f, g : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin, ovat differentioituvia pisteessä $x_0 \in \mathcal{G}$, niin kuvaus

$$f \cdot g : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}, (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

on differentioituva pisteessä x_0 ja

$$D(f \cdot g)(x_0)h = Df(x_0)h \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot Dg(x_0)h.$$

Huomautus merkinnästä:

Sisätulo $f \cdot g : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ eli $(f | g) : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ merkitään

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(x) &= (f | g)(x) \\ f(x) \cdot g(x) &= (f(x) | g(x)). \end{aligned}$$

Lause 7.7: Ketjusääntö. Tärkeä! Olkoon $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m$ avoin. Jos kuvaus $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ on differentioituva pisteessä $x_0 \in \mathcal{U}$ ja kuvaus $g : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^l$ on differentioituva pisteessä $y_0 = f(x_0) \in \mathcal{V}$, niin yhdistetty kuvaus $g \circ f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^l$ on differentioituva pisteessä $x_0 \in \mathcal{U}$ ja

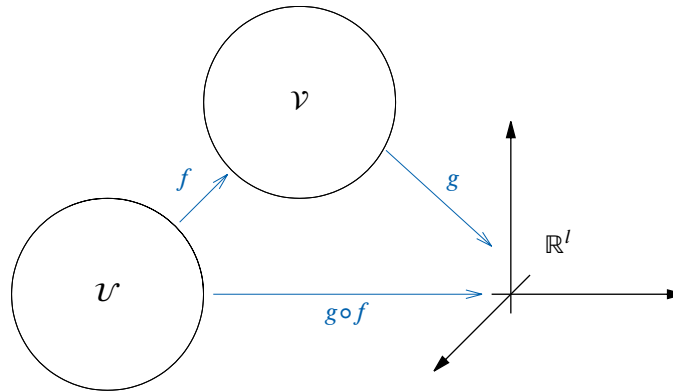
$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(y_0) Df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^l),$$

toisin sanoen $D(g \circ f)(x_0)h = Dg(f(x_0)) Df(x_0)h$, $h \in \mathbb{R}^n$.

Todistus.

- (1) Kehitelmä,
- (2) funktion f jatkuvuuden hyödyntäminen.

□



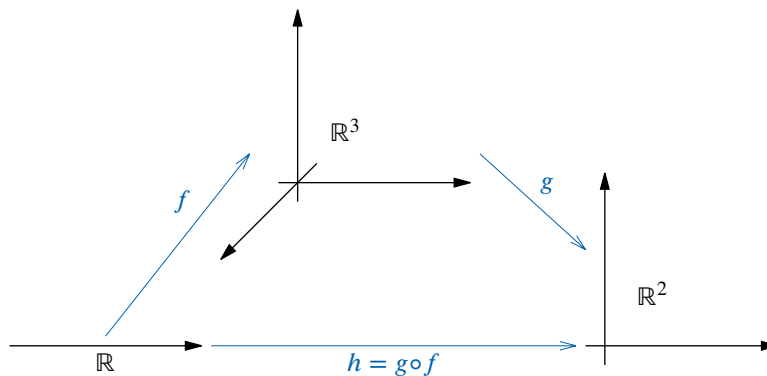
Kuva 1: Lauseen 7.7 yhdistetty kuvaus $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^l$.

Esimerkki 7.8 Etsi derivaatta $Dh(x_0)$, kun

$$h = g \circ f, \text{ missä } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto (\sin x, -x, x^2),$$

$$\text{mat}(Df(x_0)) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, x_0 = 0,$$

$$g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2) \text{ ja } \text{mat}(g) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$



Kuva 2: Esimerkin 7.8 yhdistetty kuvaus $h = g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Ratkaisuehdotus. Ketjusäännön nojalla yhdistetty kuvaus $h = g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ on diffva pisteessä $x_0 = 0$ ja

$$Dh(0) = Dg(f(0)) \circ Df(0) = g \circ Df(0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$$

ja

$$\text{mat}(Dh(0)) = \text{mat}(g) \text{mat}(Df(0)) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Siis $k = Dh(0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $k(x) = (-3x, 2x)$.

8 Suunnattu derivaatta ja osittaisderivaatta

Määritelmä 8.1: Suunnattu derivaatta. Olkoon $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin, $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathcal{G}$ ja $e \in \mathbb{R}^n$ yksikkövektori, $\|e\| = 1$. Jos raja-arvo

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in \mathbb{R}}} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t}$$

on olemassa, niin merkitään tätä raja-arvoa $\partial_e f(x_0) \in \mathbb{R}^m$ ja sanotaan, että $\partial_e f(x_0) \in \mathbb{R}^m$ on kuvauksen f suunnattu derivaatta pisteessä x_0 suuntaan e .

Esimerkki 8.2 Olkoon $\mathcal{G} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$ ja $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$(x_1, x_2) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_1 + x_2}{x_2} \right).$$

Etsi funktion f derivaatta pisteessä $x_0 = (1, 1)$ suuntaan $a = (-1, 1)$.

Ratkaisuehdotus. Yksikkövektori on nyt $e = \frac{a}{\|a\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$. Joten

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left((1, 1) + t\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) - f(1, 1)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(1 - \frac{t}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right) - f(1, 1)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1 - \frac{t}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{t}{\sqrt{2}}}, \frac{2}{1 + \frac{t}{\sqrt{2}}}\right) - (1, 2)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\frac{-2t}{\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}}, \frac{-2t}{\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}} \right) = \left(\frac{-2}{\sqrt{2}}, \frac{-2}{\sqrt{2}} \right) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Lause 8.3. Jos kuvaus $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin, on differentioituva pisteessä $x_0 \in \mathcal{G}$, niin sillä on pisteessä x_0 derivaatta jokaiseen suuntaan $e \in \mathbb{R}^n$, $\|e\| = 1$ ja

$$\partial_e f(x_0) = Df(x_0)e \in \mathbb{R}^m.$$

Todistus. Katso vektorianalyysi 1-kurssikokeen 2. tehtävä. □

Esimerkki 8.4 Olkoon $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$ avoin. Olkoon $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^2$ differentioituva kuvaus ja

$$\text{mat}(Df(x)) = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1^{x_2} \\ x_2 e^{x_1} & 0 \end{bmatrix}, x = (x_1, x_2) \in \mathcal{G}.$$

Etsi funktion f derivaatta pisteessä $(1, 2) \in \mathcal{G}$ vektorin $(1, 2)$ suuntaan.

Ratkaisuehdotus.

$$e = \frac{(1, 2)}{\|(1, 2)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

Lauseen 8.3 nojalla

$$\begin{aligned} \partial_e f(1, 2) &= Df(1, 2)e \\ &= \begin{bmatrix} 1^2 & 1^2 \\ 2e & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{5}} \\ \frac{2e}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \sim \left(\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{2e}{\sqrt{5}} \right) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Määritelmä 8.5: Osittaisderivaatat. Olkoon $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Kuvauksen $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^m$ suunnatut derivaatat pisteessä $x_0 \in \mathcal{G}$ kantavektoreiden $e_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, n, \|e_i\| = 1$, suuntaan ovat (jos ne ovat olemassa) kuvauksen f (vektori)osittaisderivaatat pisteessä x_0 . Merkitään

$$\partial_{e_i} f(x_0) =: \partial_i f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(x_0) = D_i f(x_0), \quad i = 1, \dots, n.$$

Lause 8.6. *Olkoon $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin, olkoon $x_0 \in \mathcal{G}$.*

Kuvauksella $f = (f_1, \dots, f_m) : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^m$ on olemassa osittaisderivaatta $\partial_i f(x_0)$, jos ja vain jos jokaisella komponenttifunktiolla $f_j : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, \dots, m$ on olemassa osittaisderivaatta $\partial_i f_j(x_0), j = i, \dots, m$.

Tällöin

$$\partial_i f(x_0) = \left(\partial_i f_1(x_0), \partial_i f_2(x_0), \dots, \partial_i f_m(x_0) \right).$$

Huomautus: Kysymys on vain seuraavasta tosiasiaista:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y,$$

jos ja vain jos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_j(x) = y_j, \quad j = 1, \dots, m,$$

missä

$$y = (y_1, \dots, y_m).$$

Esimerkki 8.7 Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + 2x_2, x_1^2 + x_2^2)$.

Silloin

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2.$$

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2.$$

Siis

$$\partial_1 f_1(x_1, x_2) = 1$$

$$\partial_2 f_1(x_1, x_2) = 2$$

$$\partial_1 f_2(x_1, x_2) = 2x_1$$

$$\partial_2 f_2(x_1, x_2) = 2x_2.$$

Siis

$$\partial_1 f(x_1, x_2) = (\partial_1 f_1(x_1, x_2), \partial_1 f_2(x_1, x_2)) = (1, 2x_1)$$

$$\partial_2 f(x_1, x_2) = (\partial_2 f_1(x_1, x_2), \partial_2 f_2(x_1, x_2)) = (2, 2x_2).$$

Lauseesta 8.3 seuraa

Korollaari 8.8. Olkoon meillä $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin, $x_0 \in \mathcal{G}$. Jos kuvaus $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^m$ on differentioituva pisteessä x_0 , niin kuvauksella f on olemassa kaikki osittaisderivaatat pisteessä x_0 ja

$$\partial_i f(x_0) = Df(x_0)e_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Seurauslause 8.8 ei päde kääntäen. Kuitenkin derivaatta on laskettavissa osittaisderivaattojen avulla.

Lause 8.9. Olkoon $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin, $x_0 \in \mathcal{G}$. Jos kuvaus $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^m$ on differentioituva pisteessä $x_0 \in \mathcal{G}$, niin

$$Df(x_0)h = \sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(x_0), \quad h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n.$$

9 Jacobin matriisi

Lause 9.1. Olkoon $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin, $x_0 \in \mathcal{G}$. Jos funktio $f = (f_1, \dots, f_m) : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^m$ on differentioituva pisteessä x_0 , niin derivaatan $Df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ matriisi pisteessä x_0 on

$$\text{mat}(Df(x_0)) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & \dots & \partial_j f_1(x_0) & \dots & \partial_n f_1(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_1 f_i(x_0) & \dots & \partial_j f_i(x_0) & \dots & \partial_n f_i(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_1 f_m(x_0) & \dots & \partial_j f_m(x_0) & \dots & \partial_n f_m(x_0) \end{bmatrix}. \quad (9.2)$$

Määritelmä 9.3: Jacobin matriisi. Matriisi (9.2) on tällöin kuvauksen f Jacobin matriisi.

Huomautus 9.4 Kertausta.

Lineaarikuvausta $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vastaa $m \times n$ - matriisi.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

Jokainen $m \times n$ -matriisi määrittelee lineaarikuvauksen $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ siten, että kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$

$$y = (y_1, \dots, y_m) = Ax = A(x_1, \dots, x_n),$$

jos ja vain jos

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Merkitsemme

1. $A \sim [a_{ij}] = \text{mat}(A)$
2. $a_{ij} = (Ae_j)_i = e_i \cdot Ae_j$ sillä

$$Ae_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+ & \dots & +a_{1j} & \dots & +0 \\ \vdots & \dots & +a_{2j} & \dots & +0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & +0 \\ \vdots & \dots & +a_{ij} & \dots & +0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & +0 \\ 0+ & \dots & +a_{mj} & \dots & +0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

eli $Ae_j = A(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{mj})$, joten

$$(Ae_j)_i = a_{ij} = e_i \cdot Ae_j, \quad \text{missä } e_i \in \mathbb{R}^m, Ae_j \in \mathbb{R}^m.$$

Todistus. Olkoon $[a_{ij}] = \text{mat}(Df(x_0))$. Siis Lauseen 8.9, Lauseen 8.6 ja Seurauslauseen 8.8 nojalla

$$a_{ij} = e_i \cdot Df(x_0)e_j = e_i \cdot \partial_j f(x_0) = \partial_j f_i(x_0).$$

□

Esimerkki 9.5 Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_1 x_2, x_2^2)$. Tällöin f on differentioituva erityisesti pisteessä $(1, 1)$. Silloin

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, f_1(x_1, x_2) = x_1 x_2 \\ f_2 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, f_2(x_1, x_2) = x_2^2, \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \partial_1 f_1(x_1, x_2) &= x_2 & \partial_2 f_1(x_1, x_2) &= x_1 \\ \partial_1 f_2(x_1, x_2) &= 0 & \partial_2 f_2(x_1, x_2) &= 2x_2. \end{aligned}$$

Silloin

$$\text{mat}(Df(1, 1)) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(1, 1) & \partial_2 f_1(1, 1) \\ \partial_1 f_2(1, 1) & \partial_2 f_2(1, 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Määritelmä 9.6: Jacobin determinanti.

Pisteessä $x_0 \in \mathcal{G}$ differentioituvan kuvauksen $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^n, \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin, Jacobin determinanti $J_f(x_0)$ pisteessä $x_0 \in \mathcal{G}$ on

$$J_f(x_0) = \det(Df(x_0)).$$

Siis vastaavan Jacobin matriisin determinanti.

Esimerkki 9.7 Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_1 \sin x_2)$. Tällöin f on differentioituva. Etsi $J_f(0)$.

Ratkaisuehdotus. Nyt $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x_1, x_2) = x_1$, ja siis

$$\partial_1 f_1(x_1, x_2) = 1 \text{ ja } \partial_2 f_1(x_1, x_2) = 0$$

ja erityisesti

$$\partial_1 f_1(0) = 1 \text{ ja } \partial_2 f_1(0) = 0.$$

Ja $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x_1, x_2) = x_1 \sin x_2$, ja siis

$$\partial_1 f_2(x_1, x_2) = \sin x_2 \text{ ja } \partial_2 f_2(x_1, x_2) = x_1 \cos x_2$$

ja erityisesti

$$\partial_1 f_2(0) = 0 \text{ ja } \partial_2 f_2(0) = 0.$$

$$\text{siis } J_f(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Lause 9.8. Pisteessä x_0 differentioituvan kuvauksen $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^n, \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin, derivaatta $Df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ on bijektio, jos ja vain jos $J_f(x_0) \neq 0$.

Todistus. Lineaarialgebra. □

Esimerkki 9.9 Kuvaus $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_1 x_2)$, on differentioituva.

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

$$\partial_1 f_1(x_1, x_2) = 1$$

$$\partial_2 f_1(x_1, x_2) = 1$$

$$\partial_1 f_2(x_1, x_2) = x_2$$

$$\partial_2 f_2(x_1, x_2) = x_1.$$

Kuvauksen Jacobin determinantti on

$$J_f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 - x_2.$$

Siis $Df(x) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ on bijektio suoran $x_1 - x_2 = 0$ ulkopuolisissa pisteissä, eli kun

$$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ ja } x_1 \neq x_2.$$

10 Differentioituvuudesta

Lause 10.1. Kuvaus $f = (f_1, \dots, f_m) : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko, on differentioituva pisteessä $x_0 \in \mathcal{G}$, jos ja vain jos komponenttifunktiot $f_j : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, ovat differentioituvia pisteessä x_0 . Tällöin

$$Df(x_0)h = \sum_{j=1}^m (Df_j(x_0)h)e_j = \sum_{j=1}^m (\nabla f_j(x_0) \cdot h)e_j.$$

Lause 10.2. Kuvaus $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko, on differentioituva pisteessä $x_0 \in \mathcal{G}$, jos jollakin j , $1 \leq j \leq n$, $\partial_j f(x_0)$ on olemassa sekä muut $n-1$ derivaattaa $\partial_i f$, $i \neq j$, ovat olemassa pisteen x_0 jossain ympäristössä ja jatkuvia pisteessä x_0 .

Määritelmä 10.3: Jatkuvasti differentioituva kuvaus.

Differentioituva kuvaus $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko, on jatkuvasti differentioituva, jos sen derivaattakuvaus

$$Df : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), x \mapsto Df(x)$$

on jatkuva.

Lause 10.4. Tärkeä!

Kuvaus $f := (f_1, \dots, f_m) : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko, on jatkuvasti differentioituva, jos ja vain jos kaikki komponenttifunktioiden $f_j : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, osittaisderivaatat $\partial_i f_j$, $i = 1, \dots, n$ ovat olemassa (ja) jatkuvia avoimessa joukossa \mathcal{G} .

Esimerkki 10.5 (Tärkeä!)

Olkoon $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x_1^2 + x_2 x_3, e^{x_2} + x_1 \cos x_3)$. Kuvaus f on jatkuvasti differentioituva, sillä

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} & f_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_2 x_3, \\ f_2 : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} & f_2(x_1, x_2, x_3) &= e^{x_2} + x_1 \cos x_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_1 f_1(x_1, x_2, x_3) &= 2x_1 & \partial_2 f_1(x_1, x_2, x_3) &= x_3 & \partial_3 f_1(x_1, x_2, x_3) &= x_2 \\ \partial_1 f_2(x_1, x_2, x_3) &= \cos x_3 & \partial_2 f_2(x_1, x_2, x_3) &= e^{x_2} & \partial_3 f_2(x_1, x_2, x_3) &= -x_1 \sin x_3 \end{aligned}$$

ja siis osittaisderivaatat ovat jatkuvia $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Edelleen

$$\text{mat}(Df(x)) \sim \begin{bmatrix} 2x_1 & x_3 & x_2 \\ \cos x_3 & e^{x_2} & -x_1 \sin x_3 \end{bmatrix}$$

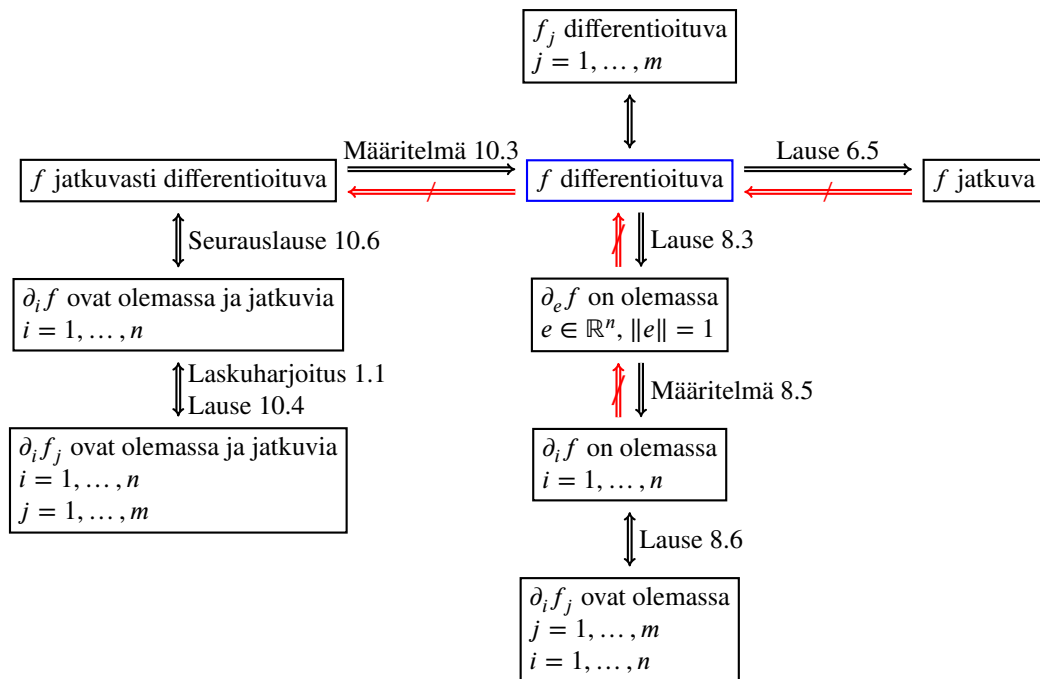
ja erityisesti

$$Df(1, 0, \pi) \sim \begin{bmatrix} 2 & \pi & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Korollaari 10.6.

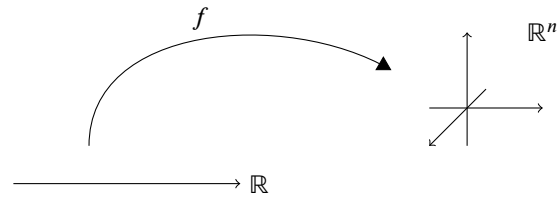
Kuvaus $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko, on jatkuvasti differentioituva, jos ja vain jos kaikki (vektori)osittaisderivaatat $\partial_i f$, $i = 1, \dots, n$, ovat olemassa ja jatkuvia joukossa \mathcal{G} .

10.7 Yhteenveto



Kuva 3: Yhteenveto differentioituvuudesta. Olkoon yllä $f = (f_1, \dots, f_m) : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^m, \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko. \Rightarrow : Katso Vektorianalyysi I -luennot, siellä on vastaesimerkit.

11 Yhden muuttujan vektoriarvoiset kuvaukset



Kuva 4: Yhden muuttujan vektoriarvoinen kuvaus f kuvaa reaaliakselin \mathbb{R} (tai sen avoimen joukon) vektoriavaruuteen \mathbb{R}^n .

Lause 11.1. *Yhden muuttujan vektoriarvoinen funktio $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}$ avoin joukko, on differentioituva pisteessä $t_0 \in \mathcal{G}$, jos ja vain jos on olemassa raja-arvo (ns. derivaattavektori)*

$$f'(t_0) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \in \mathcal{G}}} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \in \mathbb{R}^m.$$

Tällöin

$$Df(t_0)h = hf'(t_0), \quad h \in \mathbb{R}.$$

Lause 11.2. *Yhden muuttujan vektoriarvoinen funktion $f = (f_1, \dots, f_m) : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^m$, \mathcal{G} avoin joukko reaaliakselilla, on differentioituva pisteessä $t_0 \in \mathcal{G}$, jos ja vain jos jokaisella komponenttifunktiolla $f_j : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, on derivaatta $f'_j(t_0) \in \mathbb{R}$ pisteessä $t_0 \in \mathcal{G}$, jolloin*

$$f'(t_0) = (f'_1(t_0), f'_2(t_0), \dots, f'_m(t_0)).$$

Huomautus: Lause 11.2 on hyödyllinen jatkossa.

Esimerkki 11.3 Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (e^t, t^3, |t|^{\frac{1}{3}})$. Silloin

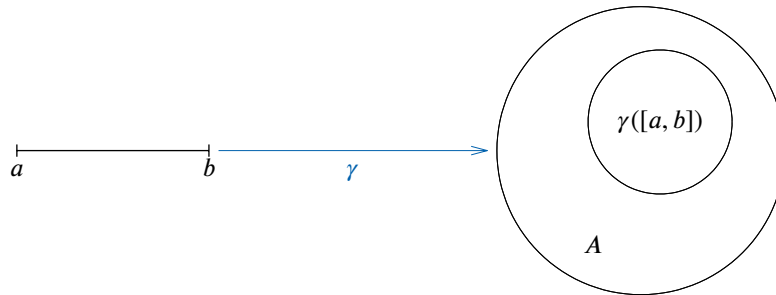
$$\begin{array}{lll} f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, & t \mapsto e^t & \text{derivoituva koko reaaliakselilla,} \\ f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, & t \mapsto t^3 & \text{derivoituva koko reaaliakselilla,} \\ f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, & t \mapsto |t|^{\frac{1}{3}}. & \end{array}$$

Siis f on differentioituva täsmälleen pisteissä $t \neq 0$, ja

$$f'(t) = \left(e^t, 3t^2, \frac{1}{3}|t|^{-\frac{2}{3}} \right) \in \mathbb{R}^3.$$

11.4 Jatkuvasti differentioituvat polut

Polku on jatkuva kuvaus $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Polku γ on polku joukossa $A \subset \mathbb{R}^m$, jos $\gamma(t) \in A$, kaikilla $t \in [a, b]$.



Kuva 5: Polku $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$, on polku joukossa $A \subset \mathbb{R}^m$, jos $\gamma(t) \in A$, kaikilla $t \in [a, b]$. Eli polun jälki $|\gamma| = \gamma([a, b]) \subset A$.

Polun γ jälki on sen kuvajoukko

$$\{\gamma(t) \mid t \in [a, b]\}$$

ja merkitään usein $|\gamma| = \gamma([a, b])$.

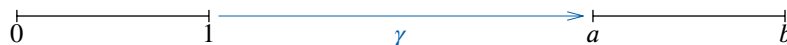
Joukko $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$ on käyrä pisteestä x pisteeseen y , jos se on jonkun polun $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ jälki ja jos $x = \gamma(a)$ ja $y = \gamma(b)$. Tällöin γ on käyrän $\Gamma = \gamma([a, b])$ parametriesitys parametrina $t \in [a, b]$.

Käyrää Γ sanotaan kaareksi, jos $x \neq y$.

Esimerkki 11.5 Kuvaus $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\gamma(t) = a + t(b - a)$, on polku ja sen jälki

$$\gamma([0, 1]) = \{x \in \mathbb{R}^m : x = a + t(b - a), t \in [0, 1]\} =: \mathcal{J}(a, b)$$

on kaari pisteestä a pisteeseen b ; pisteiden a ja b välinen jana.



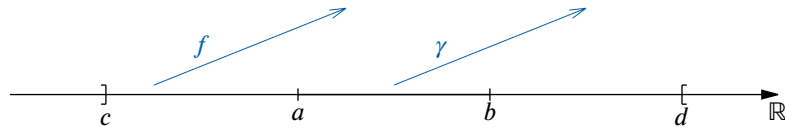
Kuva 6: Esimerkin 11.5 polku γ , joka kuvaa välin $[0, 1]$ janaksi $\mathcal{J}(a, b)$.

Polku $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ on jatkuvasti differentioituva, jos on olemassa avoin väli $]c, d[$ siten, että $[a, b] \subset]c, d[$, ja jatkuvasti differentioituva funktio $f :]c, d[\rightarrow \mathbb{R}^m$ siten, että

$$\gamma = f \Big|_{[a, b]}.$$

Tällöin merkitään $\gamma'(t) = f'(t)$, $t \in [a, b]$ ja sanotaan, että $\gamma'(t) \in \mathbb{R}^m$ on polun γ derivaatta pisteessä $t \in [a, b]$.

Huomautus: $\gamma(t) = f \Big|_{[a, b]} t = f(t)$, kaikilla $t \in [a, b]$.



Kuva 7: Jatkuvasti differentioituva polku.

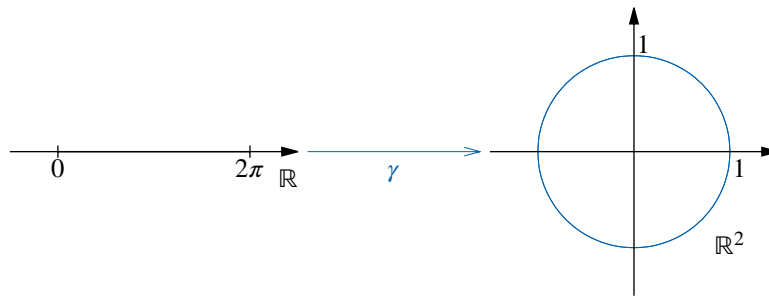
Esimerkki 11.6 Olkoon $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. Tällöin γ on polku. Määritellään $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos t, \sin t)$, jolloin f on jatkuvasti differentioituva, sillä (osittais)derivaatat ovat jatkuvia;

$$\text{mat}(Df(t)) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \sim (-\sin t, \cos t) = f'(t), t \in \mathbb{R}.$$

Nyt $\gamma = f|_{[0, 2\pi]}$. Siis γ on jatkuvasti differentioituva polku ja

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t), t \in [0, 2\pi].$$

Polun γ jälki on yksikköympyrän kehä.

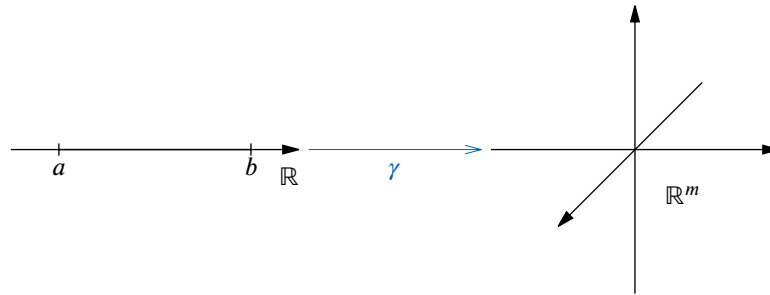


Kuva 8: Esimerkin 11.6 jatkuvasti differentioituva polku.

Huomautus: Käyrällä on monta parametriesitystä.

Esimerkki Käyrällä $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ on muun muassa seuraavat parametriesitykset

$$\begin{aligned} \gamma &: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (\cos t, \sin t) \\ \alpha &: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \alpha(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \\ \beta &: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \beta(t) = (\cos 100t, \sin 100t). \end{aligned}$$



Kuva 9: Muistutuksena, polku on jatkuva kuvaus $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, jossa $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Huomautus 11.7 Polku $\gamma = (\gamma_1 \dots \gamma_m) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ on jatkuvasti differentioituva, jos ja vain jos jokainen $\gamma_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, \dots, m$ on jatkuvasti derivoituva. (Päätepisteissä toispuoleiset derivaatat.)

Määritelmä 11.8. Polku $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ on säännöllinen, jos se on jatkuvasti differentioituva ja $\|\gamma'(t)\| > 0$ kaikilla $t \in [a, b]$.

Huomautus Tässä siis

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \dots + \gamma_m'(t)^2}.$$

Vektorin $\gamma'(t)$ pituus on lineaarikuvauksen $D\gamma(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ normi.

Esimerkki 11.9 1. Esimerkin 11.6 polku $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ on säännöllinen polku, sillä γ on jatkuvasti differentioituva ja

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1 > 0, \forall t.$$

2. Polku $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (t^2, t^3)$ on jatkuvasti differentioituva, mutta ei säännöllinen, sillä $\gamma'(0) = 0 \in \mathbb{R}^2$.

Määritelmä 11.10. Olkoon $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ jatkuvasti differentioituva polku. Jos $\gamma'(t_0) \neq 0$, niin polun tangenttivektori pisteessä $\gamma(t_0)$ on $\gamma'(t_0)$ ja polun γ yksikkötangenttivektori pisteessä $\gamma(t_0)$ on $\frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}$.

Joukko

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^m \mid x = \gamma(t_0) + s\gamma'(t_0), s \in \mathbb{R} \right\}$$

on polun γ tangentti(suora) pisteessä $\gamma(t_0)$.

Esimerkki 11.11 Polulla $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ on jokaisessa pisteessä $\gamma(t), t \in [0, 2\pi]$, olemassa (yksikkö)tangenttivektori

$$\gamma'(t) = (\sin t, \cos t), \quad \|\gamma'(t)\| = 1$$

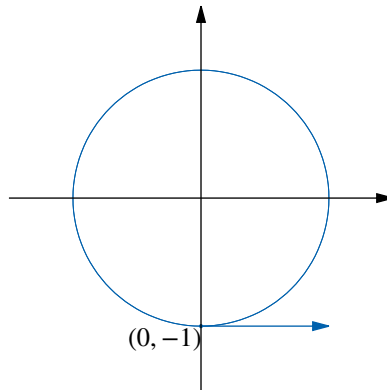
ja tangentti(suora)

$$\begin{aligned} & \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x = (\cos t, \sin t) + s(-\sin t, \cos t), s \in \mathbb{R} \right\} \\ & = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x = (\cos t - s \sin t, \sin t + s \cos t), s \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Jos $t = \frac{3\pi}{2}$, niin $\gamma\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0, -1)$ ja $\gamma'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (1, 0)$ ja tangentti(suora)

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x = (s, -1), s \in \mathbb{R} \right\},$$

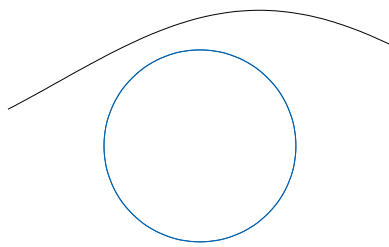
on pisteen $\gamma\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ kautta kulkeva suora, jonka suunnan määrää $\gamma'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.



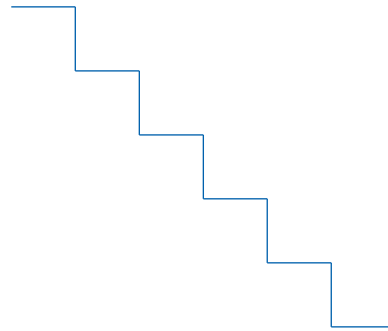
Kuva 10: Yksikköympyrä, eli esimerkin 11.11 polku. Merkittynä piste $\gamma\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0, -1)$ ja samassa pisteessä tangenttivektori $\gamma'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (1, 0)$.

11.12 Paloittain säännöllisistä poluista

Monesti käytännössä polut eivät ole säännöllisiä, mutta ne voidaan paloittaa säännöllisiin osiin.



(a) "Siistejä" eli säännöllisiä polkuja.



(b) Paloittain säännöllinen polku.

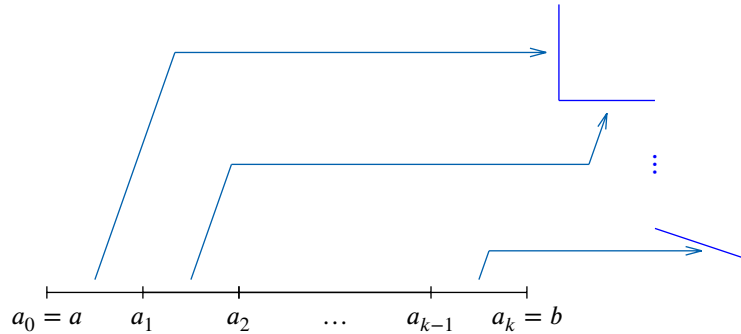
Kuva 11: Esimerkkejä säännöllisistä ja paloittain säännöllisistä poluista.

Polku $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ on paloittain säännöllinen, jos on olemassa pisteet $a_j, j = 0, 1, \dots, k$ siten, että $a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$ ja polku

$$v_j = \gamma'|_{[a_{j-1}, a_j]}, j = 1, \dots, k$$

on säännöllinen.

Pisteissä a_j toispuoleiset derivaatat: katso komponenttifunktioita käyttäen.



Kuva 12: Paloittain säännöllinen polku $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$. Väli $[a, b]$ voidaan jakaa paloihin $a_j, j = 0, 1, \dots, k$ siten, että $a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$ ja kutakin väliä $[a_{j-1}, a_j]$ vastaava polku on säännöllinen.

Esimerkki 11.13 Olkoon meillä $\gamma : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$.

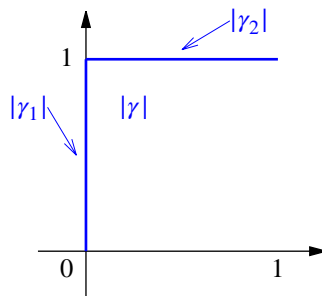
$$\gamma(t) = \begin{cases} (0, t), & \text{kun } t \in [0, 1] \\ (t - 1, 1), & \text{kun } t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Tällöin γ on paloittain säännöllinen.

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f_1(t) = (0, t), \text{ jatkuvasti differentioituva}$$

$$f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f_2(t) = (t - 1, 1), \text{ jatkuvasti differentioituva.}$$

Merkitään $\gamma_1 := f_1|_{[0,1]}$ ja $\gamma_2 := f_2|_{[1,2]}$. Silloin $\gamma'_1 = (0, 1) \neq (0, 0)$ ja $\gamma'_2 = (1, 0) \neq (0, 0)$.



Kuva 13: Esimerkin 11.13 paloittain säännöllinen polku.

12 Käänteiskuvaslause

Tutkimme seuraavassa kuvauksen lokaalia kääntämistä.

Lause 12.1: Lokaali injektiiivisyys. Olkoon $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$, \mathcal{G} avoin avaruudessa \mathbb{R}^n , siten, että

1. f on jatkuvasti differentioituva,
2. $J_f(x_0) \neq 0$ pisteessä $x_0 \in \mathcal{G}$.

Silloin pisteellä x_0 on olemassa avoin ympäristö $U \subset \mathcal{G}$ siten, että $f|_U$ on injektio eli f on lokaali injektio pisteessä x_0 . Lisäksi $J_f(x) \neq 0$ kaikilla $x \in U$.

Huomautus 12.2 Lauseeseen 12.1 huomautuksia.

1. On oleellista, että Lauseessa 12.1 lähtö- ja maalijoukko ovat saman dimensioisia.
2. Ehto 2 Lauseessa 12.1 merkitsee, että kuvaus $Df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ on bijektio. Koska $Df(x_0)$ approksimoi kuvausta $x \mapsto f(x) - f(x_0)$ pisteen x_0 pienessä ympäristössä, niin voidaan tutkia olisiko itse f lokaali injektio.
3. Jos $n = 1$ niin $J_f(x_0) = f'(x_0)$ ja ehto 2 Lauseessa 12.1 merkitsee, että $f'(x_0) \neq 0$. Silloin Lause 12.1 on tavallinen kuvauksen lokaalikääntämislause. (Aikaisempi analyysin kurssi):

Jos $f'(x_0) \neq 0$ niin on olemassa pisteen x_0 ympäristö siten, että f on aidosti monotoninen ja silloin f on lokaali injektio.

Huomautus 12.3 (Tärkeä!)

1. Kuvauksen $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$, \mathcal{G} on avoin avaruudessa \mathbb{R}^n , $n \geq 2$ ei tarvitse olla injektio, vaikka $J_f(x) \neq 0$ kaikilla $x \in \mathcal{G}$.

Esimerkki

Jos $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (e^{x_1} \cos x_2, e^{x_1} \sin x_2)$ niin

$$J_f(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} e^{x_1} \cos x_2 & -e^{x_1} \sin x_2 \\ e^{x_1} \sin x_2 & e^{x_1} \cos x_2 \end{vmatrix} = e^{2x_1} \neq 0 \text{ aina.}$$

Kuitenkin $f(x_1, x_2) = f(x_1, x_2 + k2\pi)$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

2. Huomaa tapaus $n = 1$. (Aikaisemmat analyysin kurssit.) Kuitenkin jos $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva ja lokaali injektio kaikilla $x \in]a, b[$, niin f on injektio.
3. Jatkuvasti differentioituva kuvaus $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$, \mathcal{G} avoin avaruudessa \mathbb{R}^n , voi olla injektio vaikka $J_f(x) = 0$ joillakin $x \in \mathcal{G}$.

Esimerkki

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$, $f'(0) = 0$.

(b) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x\|x\|$ on jopa bijektio, mutta $J_f(0) = 0$.

Esimerkki 12.4 Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1^2, x_2)$. Missä pisteissä f määrittelee lokaalin injektion? Määrittää suurin $r > 0$ siten, että $f|_{\mathcal{B}(x_0, r)}$ on injektio.

Ratkaisuehdotus. Koska f on jatkuvasti differentioituva, niin voimme soveltaa Lausetta 12.1

$$J_f(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 2x_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x_1,$$

joten $J_f(x_1, x_2) \neq 0$, kun $x_1 \neq 0$. Siis f on lokaali injektio ainakin pisteessä $(x_1, x_2) \neq (0, x_2)$.

Suoran $x_1 = 0$ pisteet on tutkittava erikseen. Kaikilla $t > 0$, $f(x_1, x_2) = (t^2, x_2) = f(-t, x_2)$, joten f ei ole lokaali injektio.

Pisteen $(0, x_2)$ jokaisesta ympäristöstä löytyy kaksi eri pistettä jotka kuvautuvat samaksi pisteeksi, näin ollen f ei ole lokaali injektio pisteessä $(0, x_2)$.

Erityisesti pisteessä $(1, 0)$ f on lokaali injektio.

On olemassa $r > 0$ siten, että $f|_{B(x_0, r)}$ on injektio.

Määrittämme suurimman luvun $r > 0$, jolle $f|_{B(x_0, r)}$ on injektio. Edellä olevasta seuraa, että $r \leq 1$.

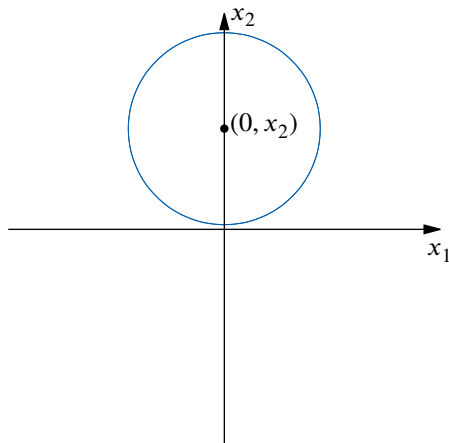
Osoitamme että $f|_{B(x_0, r)}$ on injektio.

Olkoon $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in B(x_0, 1)$ siten, että $f(x_1, x_2) = f(y_1, y_2)$.

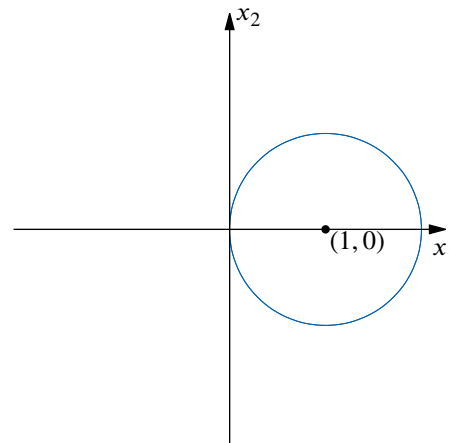
Nyt siis $x_1 > 0, y_1 > 0$

$$\begin{cases} x_1^2 = y_1^2 \Rightarrow x_1 = y_1, & \text{koska } y_1 > 0, x_1 > 0 \\ x_2 = y_2, \end{cases}$$

Siis $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$.



(a) Pisteen $(0, x_2)$ ympäristö.



(b) Piste $x_0 = (1, 0)$ ja $B(x_0, 1)$.

Kuva 14: Esimerkin 12.4 erikseen tutkittavat pisteet (a) ja piste $(1, 0)$, missä f on lokaali injektio.

Lause 12.5: Käänteiskuvaslause. Olkoon kuvaus $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^n, \mathcal{G}$ avoin avaruudessa \mathbb{R}^n , jatkuvasti differentioituva, jolle $J_f(x_0) \neq 0$ pisteessä $x_0 \in \mathcal{G}$. Silloin pisteellä x_0 on avoin ympäristö $U \subset \mathcal{G}$ siten, että

1. Rajoittumakuvaus $f|_U : U \rightarrow V = f(U)$ on bijektio.
2. $V = f(U)$ on avoin.
3. Kuvauksen $f|_U$ käänteiskuvaus $g : V \rightarrow U, g = (f|_U)^{-1}$ on jatkuvasti differentioituva ja $D(g(f(x))) = (Df(x))^{-1}$ kaikilla $x \in U$.

Todistus: Tom Apostol, *Mathematical Analysis*, 2nd edition, s. 371 – 373.

Esimerkki 12.6 Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (e^{x_1} \cos x_2, x_2 e^{x_2})$.

Osoita, että pisteellä $(1, 0)$ on ympäristö siten, että $f|_U : U \rightarrow f(U)$ on bijektio. Määrä tämän kuvauksen $f|_U$ käänteiskuvaslausan $g := (f|_U)^{-1}$ derivaatta.

Ratkaisuehdotus. Kuvaus f on jatkuvasti differentioituva. Nyt

$$J_f(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} e^{x_1} \cos x_2 & -e^{x_1} \sin x_2 \\ 0 & e^{x_2} + 2x_2 e^{x_2} \end{vmatrix}.$$

Siis

$$J_f(1, 0) = \begin{vmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = e \neq 0.$$

Käänteiskuvaslauseen nojalla pisteellä $(1, 0)$ on olemassa ympäristö U siten, että $f|_U : U \rightarrow f(U) = V$ on bijektio.

Lisäksi käänteiskuvaus $g = (f|_U)^{-1}$ on jatkuvasti differentioituva ja

$$\text{mat}(D(g(e, 0))) = \begin{bmatrix} e & -0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Määritelmä 12.7: Diffeomorfismi. Bijektio $f : U \rightarrow V, U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^n$ avoimia, on diffeomorfismi jos molemmat $f : U \rightarrow V$ ja $f^{-1} : V \rightarrow U$ ovat jatkuvasti differentioituvia.

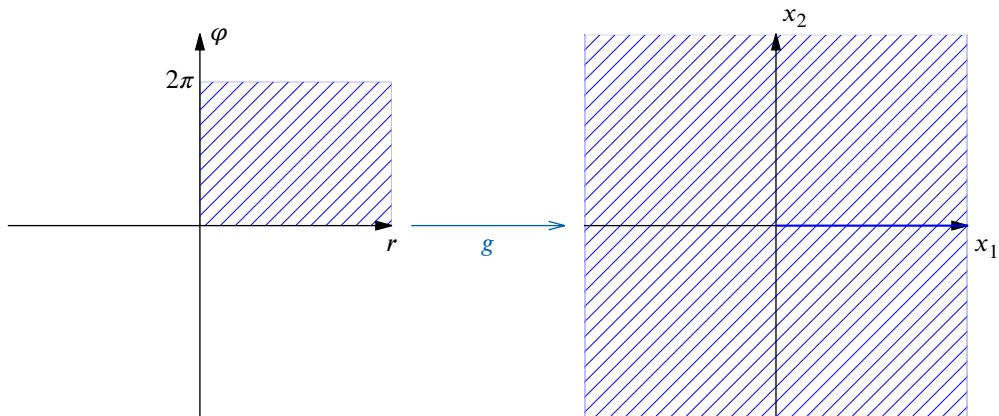
Esimerkki 12.8 (Tärkeä!) Napakoordinaattikuvaus tasossa \mathbb{R}^2

$$g : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ g(r, \rho) = (r \cos \rho, r \sin \rho),$$

on jatkuvasti differentioituva injektio ja

$$J_g(r, \rho) = \begin{vmatrix} \cos \rho & -r \sin \rho \\ \sin \rho & r \cos \rho \end{vmatrix} = r.$$

Siis $g : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ on diffeomorfismi.



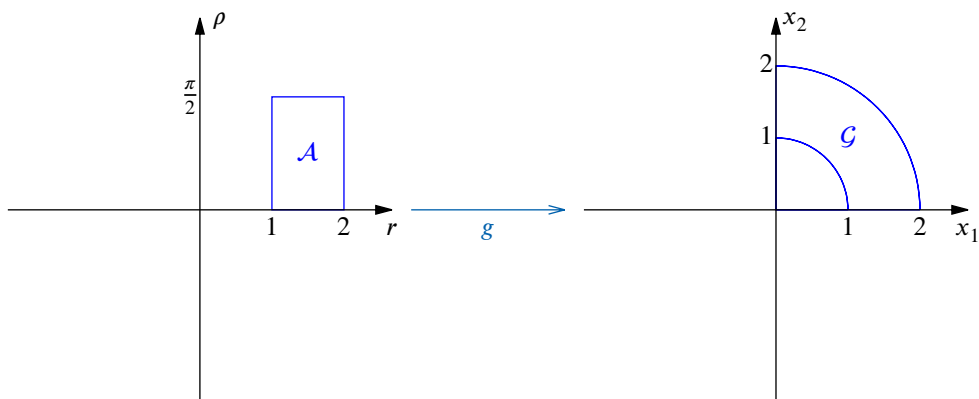
Kuva 15: Esimerkin 12.8 kuvaus $g : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$.

Esimerkki 12.9 Olkoon

$$\mathcal{G} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x_1^2 + x_2^2 < 4, x_1 > 0, x_2 > 0\}.$$

Silloin $g(\mathcal{A}) = \mathcal{G}$, missä

$$\mathcal{A} = \{(r, \rho) \in \mathbb{R}^2 : 1 < r < 2, 0 < \rho < \frac{\pi}{2}\}.$$



Kuva 16: Esimerkin 12.9 kuvaus g ja joukot \mathcal{A} ja \mathcal{G} .

13 Ääriarvotehtävistä

Määritelmä 13.1. Sidotulla ääriarvotehtävällä tarkoitetaan funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, ääriarvopisteiden ja ääriarvojen määräämistä kuvauksen

$$h = (h_1, \dots, h_p) : A \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad 1 \leq p < n$$

antamien rajoitteiden

$$h_1(x) = h_2(x) = \dots = h_p(x) = 0$$

määräämässä joukon A osajoukossa

$$S = \{x \in A \mid h(x) = 0\}.$$

Esimerkki 13.2 Määrää funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 - x_2 + x_3$ ääriarvopisteet ja ääriarvot pallopinnalla

$$S^2(0, 1) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Lause 13.3: Lagrangen kertojien menetelmä. Olkoot $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ ja $h = (h_1, \dots, h_p) : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^p$, $1 \leq p < n$, avoimessa joukossa $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ jatkuvasti differentioituvia funktioita. Jos funktiolla f on tasa-arvojoukossa

$$\begin{aligned} S_h(0) &= \{x \in \mathcal{G} \mid h(x) = 0\} \\ &= \left\{x \in \mathcal{G} \mid h_1(x) = h_2(x) = \dots = h_p(x) = 0\right\} \end{aligned}$$

lokaali ääriarvopiste $x_0 \in S_h(0)$ ja jos matriisin $\text{mat}(\text{D}h(x_0))$ aste on p , niin on olemassa ns. Lagrangen kertojat $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, \dots , $\lambda_p \in \mathbb{R}$ siten, että

$$\begin{aligned} \nabla f(x_0) &= \lambda_1 \nabla h_1(x_0) + \dots + \lambda_p \nabla h_p(x_0) \\ &= \sum_{k=1}^p \lambda_k \nabla h_k(x_0). \end{aligned}$$

Huomautus 13.4 Lauseen 13.3 oletuksiin funktion f mahdolliset sidotut ääriarvopisteet saadaan selville ratkaisemalla yhtälöryhmä

$$\begin{cases} \nabla f(x) &= \lambda_1 \nabla h_1(x) + \lambda_2 \nabla h_2(x) + \dots + \lambda_p \nabla h_p(x) \\ h(x) &= (h_1(x), h_2(x), \dots, h_p(x)) = (0, 0, \dots, 0), \end{cases}$$

eli yhtälöryhmä

$$\begin{cases} \partial_1 f(x) = \lambda_1 \partial_1 h_1(x) + \lambda_2 \partial_1 h_2(x) + \dots + \lambda_p \partial_1 h_p(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) = \lambda_1 \partial_n h_1(x) + \lambda_2 \partial_n h_2(x) + \dots + \lambda_p \partial_n h_p(x) \\ h_1(x) = 0 \\ \vdots \\ h_p(x) = 0. \end{cases}$$

Siis $n + p$ yhtälöä $n + p$ tuntemattomalle:

$$x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_p.$$

Huomaa, että yhtälöryhmän ratkaisu ei ole välttämättä ääriarvopiste.

13.5 Geometrista perustelua

1. Funktio f muuttuu pisteessä x_0 nopeimmin gradientin $\nabla f(x_0)$ suuntaan.
2. Oletus

$$S = S_h(0) = S_h(0, W) = S_h(0) \cap W,$$

$x_0 \in W$, W on avoin joukossa \mathcal{G} , S on säännöllinen pinta ja pinnan S normaalitaso on vektoreiden $\nabla h_1(x_0), \dots, \nabla h_p(x_0)$ virittämä.

3. Jos funktiolla f on pinnan S suhteen lokaali ääriarvo pisteessä $x_0 \in S$, niin silloin $\nabla f(x_0) \perp T x_0$, ts. $\nabla f(x_0)$ on pinnan S normaalivektori pisteessä x_0 , joten on olemassa luvut $\lambda_1 \in \mathbb{R}, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ siten, että

$$\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla h_1(x_0) + \dots + \lambda_p \nabla h_p(x_0)$$

oli Lauseen 13.3 väite.

Esimerkki 13.6 Määää esimerkin 13.2 funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 + x_3$, ääriarvopisteet pallopinnalla $S^2(0, 1)$ ja ääriarvopisteiden antamat ääriarvot.

Ratkaisuehdotus. Rajoitefunktio on $h : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$, ja rajoite-ehto on $h(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$. Tällöin

- (a) $f, h \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ on alue (eli avoin ja yhtenäinen),
- (b) $\nabla h(x) = (2x_1, 2x_2, 2x_3) \neq (0, 0, 0)$, kaikilla $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$,
- (c) $S_h(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \mid h(x) = 0\} \neq \emptyset$.

Mahdolliset sidotut ääriarvokohtat:

$$\begin{cases} \nabla f(x) = \lambda \nabla h(x) \\ h(x) = 0, \end{cases}$$

eli

$$\begin{cases} (1, -1, 1) = \lambda(2x_1, 2x_2, 2x_3) \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \end{cases}$$

eli

$$\begin{cases} 1 = \lambda 2x_1 \\ -1 = \lambda 2x_2 \\ 1 = \lambda 2x_3 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0, \end{cases} \quad x_1 = -x_2 = x_3 = \frac{1}{2\lambda}, \quad \lambda \neq 0$$

joten

$$3\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = 1 \quad \text{eli} \quad \lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Siis mahdolliset sidotut ääriarvopisteet:

$$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1).$$

Koska $S^2(0, 1)$ on kompakti ja f on jatkuva, niin f saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa pinnalla $S^2(0, 1)$:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= \sqrt{3} \quad \text{on funktion suurin arvo pinnalla } S^2(0, 1) \text{ ja} \\ f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= -\sqrt{3} \quad \text{on funktion pienin arvo pinnalla } S^2(0, 1). \end{aligned}$$

Ääriarvopiste $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \in S^2(0, 1)$ antaa funktiolle suurimman arvon $\sqrt{3}$ ja vastaavasti ääriarvopiste $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \in S^2(0, 1)$ antaa funktiolle pienimmän arvon $-\sqrt{3}$.

14 Avaruuden \mathbb{R}^n pinnoista

Määritelmä 14.1. Olkoon $1 \leq m < n$. Joukko $S \subset \mathbb{R}^n$ on m -ulotteinen alkeispinta avaruudessa \mathbb{R}^n , jos se on homeomorfinen avoimen joukon $U \subset \mathbb{R}^m$ kanssa, ts. on olemassa jatkuva bijektio $\rho : U \rightarrow S$ siten, että $\rho^{-1} : S \rightarrow U$ on myös jatkuva.

Homeomorfismi $\rho : U \rightarrow S$ on pinnan S parametriesitys.

Huomautus 14.2

1. S on varustettu avaruuden \mathbb{R}^n indusoimalla metriikalla.
2. Sovitaan merkinnöistä

$$B^k(x_0, r) = \{x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid \|x - x_0\| < r\}$$

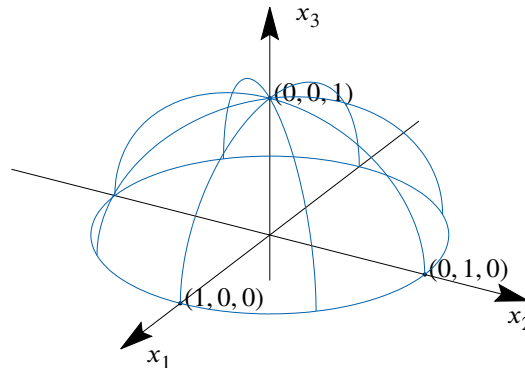
$$S^{k-1}(x_0, r) = \{x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid \|x - x_0\| = r\}$$

Esimerkki 14.3 Joukko $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_3 > 0\}$ on 2-ulotteinen alkeispinta avaruudessa \mathbb{R}^3 .

Määritetään

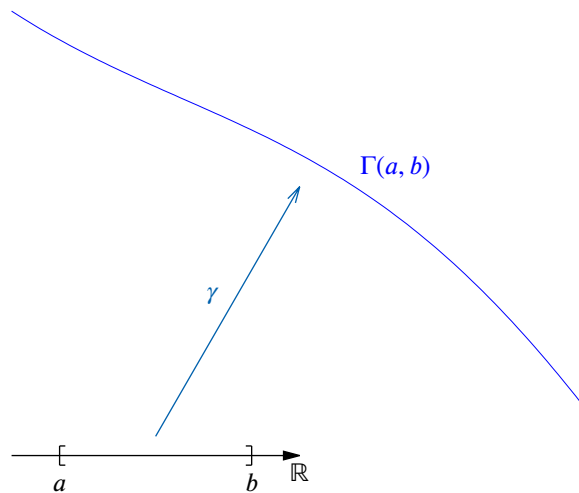
$$\rho : B^2(0, 1) \rightarrow S, \quad \rho(u_1, u_2) = \left(u_1, u_2, \sqrt{1 - u_1^2 - u_2^2}\right).$$

Tällöin ρ on jatkuva bijektio, jonka käänteisfunktio on myös jatkuva.



Kuva 17: Esimerkin 14.3 joukko $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_3 > 0\}$, joka on avaruudessa \mathbb{R}^3 oleva 2-ulotteinen puolipallon muotoinen pinta.

Esimerkki 14.4 Jos polku $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ on injektio, niin silloin käyrä $\Gamma(a, b)$ on 1-ulotteinen pinta avaruudessa \mathbb{R}^n .



Kuva 18: Esimerkin 14.4 käyrä $\Gamma(a, b)$ on 1-ulotteinen pinta avaruudessa \mathbb{R}^n .

Määritelmä 14.5. Avaruuden \mathbb{R}^n joukko $S \subset \mathbb{R}^n$ on m -ulotteinen pinta, jos jokaisella pisteellä $x \in S$ on avoin ympäristö (joukossa S) $V_x \subset S$, joka on alkeispinta parametriesityksenä

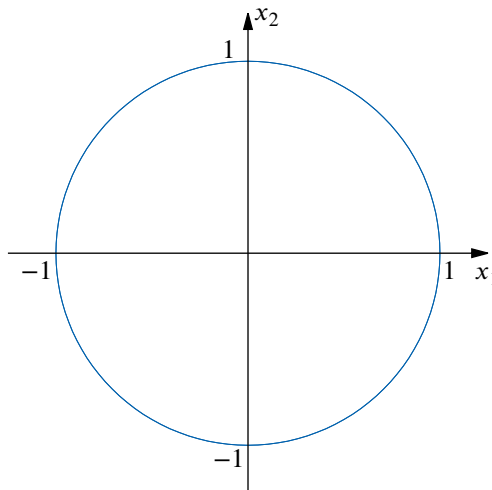
$$\rho_x : U_x \longrightarrow V_x, U_x \subset \mathbb{R}^m.$$

Jos $m = n - 1$, niin tällöin S on hyperpinta.

Esimerkki 14.6 Ympyrän kehä

$$S^1(0, 1) = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1 \right\}$$

on 1-ulotteinen pinta.



Kuva 19: Esimerkin 14.6 1-ulotteinen pinta, eli yksikköympyrä.

Huomautus 14.7

- (1.) Avaruuden \mathbb{R}^n m -ulotteinen taso T on m -ulotteinen lineaarinen avaruus tai tällaisen siirto vektorin $x_0 \in \mathbb{R}^n$ verran, ns. affiini aliavaruus, joten tason T parametriesitys on affiini kuvaus

$$A : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto x_0 + Lx,$$

missä lineaarista kuvausta $L : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vastaavan matriisin sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomat.

Jos $m = n - 1$, niin T on hypertaso.

- (2.) Differentioituvalla kuvauksella $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, U avoin avaruudessa \mathbb{R}^n , on pisteen $x_0 \in U$ lähellä (pienessä ystössä) affiini approksimaatio

$$T_{x_0}^1 \varphi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (T_{x_0}^1 \varphi)(x_0) = \varphi(x_0) + D\varphi(x_0)(x - x_0).$$

Tässä $T_{x_0}^1 \varphi$ on funktion φ 1. asteen Taylorin polynomi pisteessä x_0 .

Määritelmä 14.8. Avaruuden \mathbb{R}^n m -ulotteinen pinta $S = \varphi(u)$ on C^1 -pinta jos $\varphi : U \longrightarrow S$ on C^1 -kuvaus.

Esimerkki 14.9 Esimerkin 14.3 puolipallo S on C^1 -pinta, sillä

$$S = \varphi(\mathcal{B}^2(0, 1)), \quad \varphi : \mathcal{B}^2(0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x_1, x_2) = \left(x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} \right)$$

on jatkuvasti differentioituva homeomorfismi.

Määritelmä 14.10. Olkoon $S = \varphi(u)$, $U \subset \mathbb{R}^m$ avoin, C^1 -pinta avaruudessa \mathbb{R}^n . Jos $T_{x_0}^1 \varphi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ on m -ulotteisen tason parametriesitys, niin tämä taso

$$T_{x_0} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = (T_{u_0}^1 \varphi)(u), u \in \mathbb{R}^m \right\}$$

on pinnan S tangettitaso pisteessä $x_0 = \varphi(u_0) \in S$.

Jos pinnalla S on pisteessä $x \in S$ tangettitaso T_x , niin piste on säännöllinen. Pinta S on säännöllinen, jos sen jokainen piste on säännöllinen.

Huomautus 14.11 T_{x_0} on matriisin $\text{mat}(D\varphi(u_0))$ sarakevektoreiden $\partial_i \varphi(u_0)$, $i = 1, \dots, m$, virittämä taso, ts.

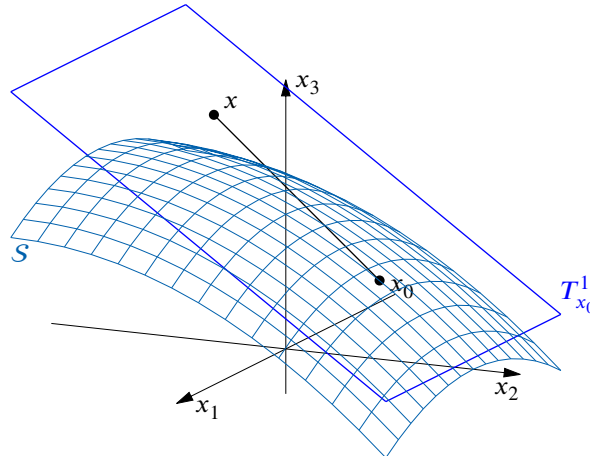
$$\begin{aligned} T_{x_0} &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = x_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i \partial_i \varphi(u_0), \alpha_i \in \mathbb{R} \right\} \\ &= x_0 + \langle \partial_1 \varphi(u_0), \partial_2 \varphi(u_0), \dots, \partial_m \varphi(u_0) \rangle. \end{aligned}$$

Määritelmä 14.12. Olkoon $S = \varphi(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, säännöllinen pinta. Pinnan S

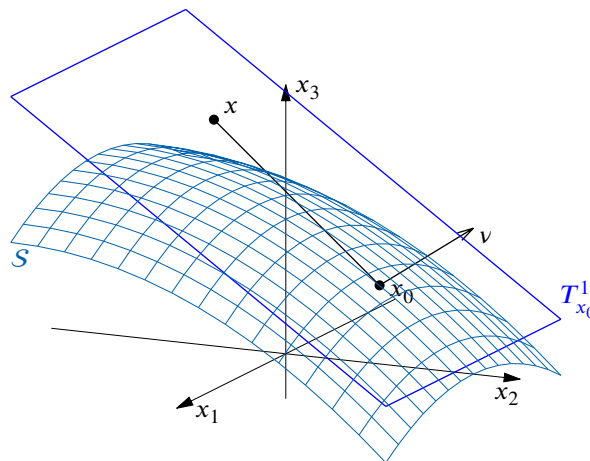
- (1) tangenttivektori pisteessä $x_0 \in S$ on jokainen vektori $x - x_0$, $x \in T_{x_0}$,
- (2) normaalivektori pisteessä $x_0 \in S$ on jokainen tangentialtasoa vastaan pisteessä x_0 kohtisuora vektori $v \neq 0$

$$v \cdot (x - x_0) = 0, \quad \text{kaikilla } x \in T_{x_0},$$

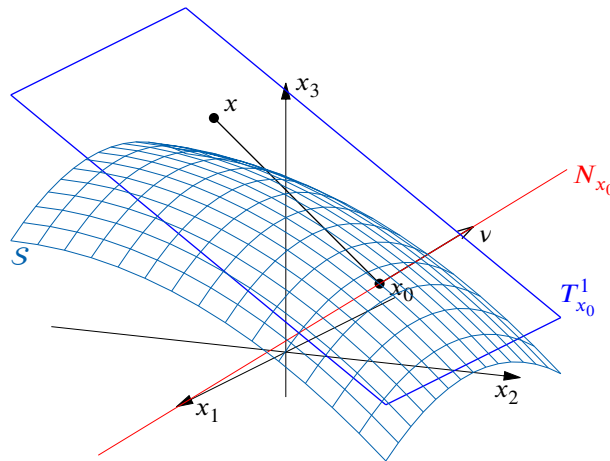
- (3) normaalitaso N_{x_0} pisteessä $x_0 \in S$ on normaalivektoreiden virittämä $(n - m)$ -ulotteinen taso.



Kuva 20: Määritelmän 14.12 1. kohdan tilanne: S on C^1 -pinta avaruudessa \mathbb{R}^3 ja sen pisteessä $x_0 \in S$ eräs tangenttivektori $x - x_0$, $x \in T_{x_0}^1$.



Kuva 21: Määritelmän 14.12 2. kohdan tilanne: S on C^1 -pinta avaruudessa \mathbb{R}^3 , sen pisteessä $x_0 \in S$ eräs tangenttivektori $x - x_0$, $x \in T_{x_0}^1$ ja eräs normaalivektori $v \neq 0$, jolle $v \cdot (x - x_0) = 0$.



Kuva 22: Määritelmän 14.12 3. kohdan tilanne: S on C^1 -pinta avaruudessa \mathbb{R}^3 , sen pisteessä $x_0 \in S$ eräs tangenttivektori $x - x_0$, $x \in T_{x_0}^1$ ja eräs normaalivektori $v \neq 0$, jolle $v \cdot (x - x_0) = 0$, sekä pisteen x_0 normaalivektoreiden virittämä normaalitaso N_{x_0} . (Tässä tapauksessa normaalisuora.)

14.13 Implisiittisesti määritellyistä pinnoista

Määritelmä Olkoon $F : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$, jatkuva kuvaus. Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}^{n-m}$. Merkitään

$$S_F(\alpha) = \{x \in \mathcal{G} \mid F(x) = \alpha\} \subset \mathbb{R}^n.$$

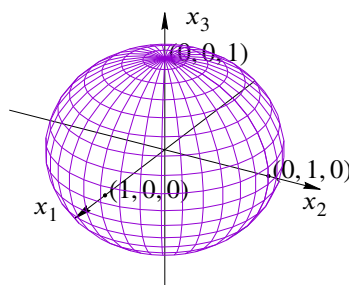
Tällöin jatkuvan kuvauksen F tasa-arvopinta joukossa W , $W \subset \mathcal{G}$ avoin, on

$$S_F(\alpha; W) := S_F(\alpha) \cap W \text{ mikäli se on pinta.}$$

Määritelmä Pinta $S \subset \mathbb{R}^n$ on jatkuvan kuvauksen $F : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$, implisiittisesti määrittele-
mä, jos

$$S = S_F(\alpha; W)$$

jollakin $\alpha \in \mathbb{R}^{n-m}$, $W \subset \mathcal{G}$ avoin.



Kuva 23: Seuraavan esimerkin pallopinta $S^2(0, 1) \subset \mathbb{R}^3$.

Esimerkki Olkoon

$$S_F(\alpha = 1) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid F(x) = 1 \right\}, \quad F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$F(x) = \|x\|^2.$$

Pallopinta $S^2(0, 1) \subset \mathbb{R}^3$ on funktion $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ implisiittisesti määrittelemä 2-ulotteinen pinta, sillä $S^2(0, 1) = S_F(1; \mathbb{R}^3)$.

Lause Olkoon $F = (F_1, \dots, F_{n-m}) : \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-m}, \mathcal{G}$ avoin avaruudessa \mathbb{R}^n, C^1 -kuvaus ja $x_0 \in \mathcal{G}$ sekä $F(x_0) = \alpha \in \mathbb{R}^{n-m}$. Jos matriisin $\text{mat}(DF(x_0))$ aste on $n-m$, niin silloin pisteellä x_0 on avoin ympäristö $W \subset \mathcal{G}$ siten, että

$$S := S_F(\alpha; W)$$

on funktion F implisiittisesti määrämä m -ulotteinen säännöllinen pinta. Lisäksi

$$T_{x_0} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid DF(x_0)(x - x_0) = 0 \right\}$$

ja

N_{x_0} on vektoreiden $\nabla F_1(x_0), \dots, \nabla F_{n-m}(x_0)$ virittämä.

Esimerkki Kuvaukselle $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, F(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ pisteessä $x_0 = (2, 1, 2) \in S_F(9)$,

$$dF(x) \sim [2x_1 \quad 2x_2 \quad 2x_3]$$

$$dF(x_0) \sim (4 \quad 2 \quad 4) \neq 0,$$

joten on olemassa $W \subset \mathbb{R}^3$ avoin siten, että $x_0 \in W$ ja $S_F(9; W) = S$ on säännöllinen 2-ulotteinen pinta avaruudessa \mathbb{R}^3 .

Lisäksi

$$T_{x_0} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid DF(x_0)(x - x_0) = 0 \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 18 \right\}$$

ja

$$N_{x_0} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x - x_0 = \alpha \nabla F(x_0), \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x = (4\alpha + 2, 2\alpha + 1, 4\alpha + 2), \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= x_0 + \langle \nabla F(x_0) \rangle$$

$$= (2, 1, 2) + \langle (2, 1, 2) \rangle = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x = (2, 1, 2) + t(2, 1, 2); t \in \mathbb{R} \right\}.$$

15 Yleistä ääriarvotehtävistä

Olkoon $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ avoin, jatkuvasti differentioituva. Tavoitteena on määrätä funktion f ääriarvot annetussa joukossa $A \subset \mathcal{G}$, eli määrätä funktion $f|_A : A \rightarrow \mathbb{R}$ globaalit ääriarvot.

Erotetaan seuraavat tapaukset:

15.1 A on kompakti joukko

Ääriarvot joukossa A löydetään tutkimalla seuraavat kolme joukkoa ja määräämällä ääriarvot niissä:

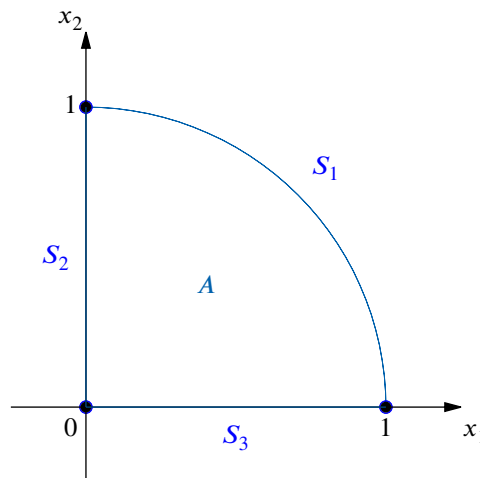
- (a) $\{x \in \text{int } A \mid \nabla f(x) = 0\} =: N$
- (b) Reunan ∂A se osa $\partial_L A$, johon voidaan soveltaa Lagrangen kertojien menetelmää
- (c) $\partial A \setminus \partial_L A =: \partial_R A$.

Funktion f suurin ja pienin arvo löydetään nyt määräämällä funktion arvot joukoissa N , $\partial_L A$, $\partial_R A$.

Muistutus: Kompaktissa joukossa $A \subset \mathbb{R}^n$ jatkuva funktio $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ saavuttaa joukossa A suurimman ja pienimmän arvonsa.

Huomautus 15.2 Joukko $\partial_R A = \partial A \setminus \partial_L A$ sisältää poikkeuspisteet, jotka on aina tutkittava erikseen. Erikoisesti tutki reunan kärkipisteet.

Esimerkki 15.3 Määrää funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 - 4x_2$, ääriarvot joukossa $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.



Kuva 24: Esimerkin 15.3 joukko $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$, joukon reunan ∂A osat S_1 , S_2 ja S_3 , sekä poikkeuspisteet (kärjet).

Ratkaisuehdotus. Funktio on $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. (Huomaa, että tämä riittäisi: $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$).

$$(a) \text{ int } A = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x_1^2 + x_2^2 < 1, x_1 > 0, x_2 > 0 \right\}$$

Kriittiset pisteet:

$$\nabla f(x) = (2x_1 - 3, 2x_2 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1, x_2) = \left(\frac{3}{2}, 2 \right).$$

Koska $\left(\frac{3}{2}, 2 \right) \notin \text{int } A$, niin $N = \emptyset$.

(b) Lagrangen menetelmää voidaan soveltaa joukossa

$$(b1) S_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid h_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \right\}.$$

f, h jatkuvasti differentioituvia

$$\nabla h_1(x) = (2x_1, 2x_2) \neq (0, 0)$$

Saadaan yhtälöt:

$$\begin{cases} \nabla f(x) = \lambda \nabla h_1(x) \\ h_1(x) = 0, \end{cases}$$

eli

$$\begin{cases} 2x_1 - 3 = \lambda 2x_1 \\ 2x_2 - 4 = \lambda 2x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Jos $\lambda = 1$, niin ristiriita \neq , koska $(-3 = 0)$.

Siis kun $\lambda \neq 1$,

$$x_1 = \frac{3}{2(1-\lambda)}$$

$$x_2 = \frac{2}{1-\lambda}$$

$$1 - \lambda = \pm \frac{5}{2}.$$

Siis $(x_1, x_2) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right)$ tai $(x_1, x_2) = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right)$.

Joukossa $\{x \in S_1 \mid x_1 > 0, x_2 > 0\} \subset \partial_L A$ on ääriarvopiste-ehdokas $(x_1, x_2) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right)$.

(b2) Joukossa $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid h_2(x) = x_1 = 0\}$, funktiolla f on mahdollinen ääriarvopiste $(0, 2) \notin \partial A$.

(b3) Joukossa $S_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid h_3(x) = x_2 = 0\}$ piste $\left(\frac{3}{2}, 0 \right) \notin \partial A$.

(c) Joukko $\partial_R A = \partial A \setminus \partial_L A$:

Ääriarvopiste-ehdokkaita ovat kärkipisteet: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$.

Yhteenveto:

Koska f on jatkuva kompaktissa joukossa A , niin riittää laskea/määrätä funktion f arvot ehdokaspisteissä:

$$f\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = -4$$

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0 \\ f(1,0) &= -2 \\ f(0,1) &= -3, \end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} \min_{x \in A} f(x) &= f\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = -4 \\ \max_{x \in A} f(x) &= f(0,0) = 0. \end{aligned}$$

15.4 A ei ole kompakti joukko

(1) Jos A on rajoitettu siten, että $\bar{A} \subset \mathcal{G}$, niin voidaan soveltaa kohdan 15.1 menetelmiä kompaktiin joukkoon \bar{A} .

Näin saatavista ääriarvopisteistä kelpaavat vain ne, jotka kuuluvat joukkoon A .

(2) Muut tilanteet tutkittava tapaus kerrallaan.

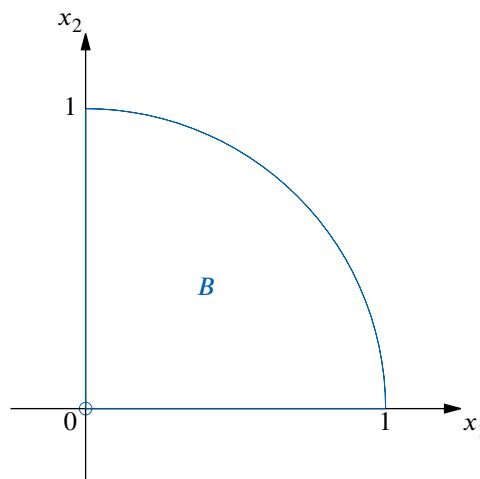
Huomautus 15.5 Ääriarvoja ei välttämättä saavuteta.

Esimerkki 15.6 Määrää Esimerkin 15.3 funktiolle f ääriarvot joukossa

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \right\}.$$

$\bar{B} = A$, missä A on Esimerkissä 15.3 annettu.

Ratkaisuehdotus. Kuten Esimerkki 15.3 sovellettuna kompaktiin joukkoon $\bar{B} = A$: nyt funktio ei saavuta maksimia joukossa B , koska $0 \notin B$.

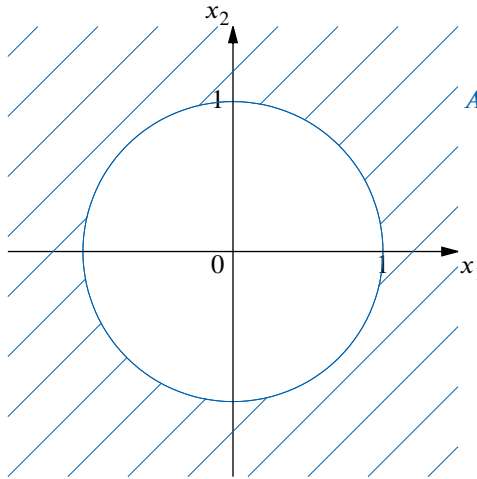


Kuva 25: Esimerkin 15.6 ei-kompakti joukko $B = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \right\}$. Origo ei siis kuulu joukkoon B .

Jos joukko on rajoittamaton, niin tapaus kerrallaan tutkittava erikseen.

Esimerkki 15.7 Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}$. Tutki, onko funktiolla f suurinta tai pienintä arvoa joukossa A , kun

$$A = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \mid \|(x_1, x_2)\|^2 \geq 1 \right\}.$$



Kuva 26: Esimerkin 15.7 ei-kompakti joukko $A = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \mid \|(x_1, x_2)\|^2 \geq 1 \right\}$, eli kaikki avaruuden \mathbb{R}^2 pisteet, jotka ovat vähintään etäisyydellä 1 origosta.

Ratkaisuehdotus. Nyt

$$x_1 = r \cos \phi$$

$$x_2 = r \sin \phi$$

$$|f(r, \phi)| = \frac{|\cos \phi|}{r} = \frac{1}{r} \leq 1, \text{ sillä } r \geq 1.$$

Siis $|f(r, \phi)| < 1$, kun $r > 1$.

Rajat ± 1 saavutetaan:

$$f(1, 0) = 1$$

Suurin arvo

$$f(-1, 0) = -1$$

Pienin arvo

toisin sanoen

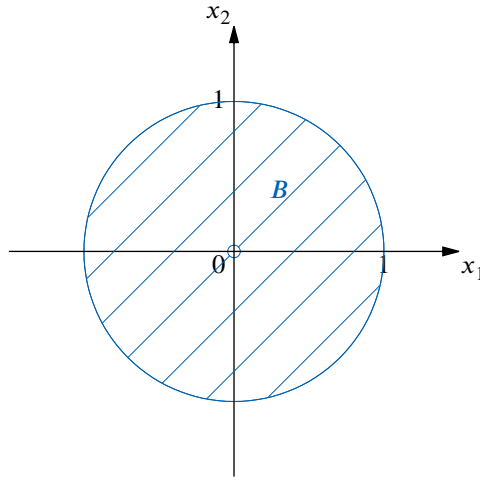
$$\max_{x \in A} f(x) = 1$$

ja

$$\min_{x \in A} f(x) = -1.$$

Esimerkki 15.8 Olkoon funktio f määritelty kuten Esimerkissä 15.7. Tutki onko funktiolla f suurinta tai pienintä arvoa joukossa B ,

$$B = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \mid 0 < x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \right\}.$$



Kuva 27: Esimerkin 15.8 ei-kompakti joukko $B = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \mid 0 < x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \right\}$, eli kaikki avaruuden \mathbb{R}^2 pisteet, jotka ovat origokeskisen suljetun yksikköympyrän sisällä, poislukien itse origo.

Ratkaisuehdotus. Nyt $f(x_1, 0) = \frac{1}{x_1}$, kun $(x_1, 0) \in B$ ja

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0^+} \frac{1}{x_1} = +\infty \quad \text{ja}$$

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0^-} \frac{1}{x_1} = -\infty,$$

joten f ei saavuta suurinta eikä pienintä arvoa joukossa B .

16 Riemannin integraalista

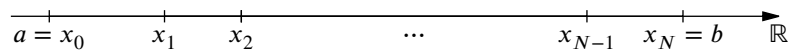
16.1 Kertausta

Olkoon f rajoitettu reaaliarvoinen funktio, joka on määritelty suljetulla välillä $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Välin $[a, b]$ jako \mathcal{P} on äärellinen jono numeroita x_0, x_1, \dots, x_N siten, että $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$. Kun jako on annettu, merkitään osaväliä

$$I_j := [x_{j-1}, x_j]$$

ja merkitään osavälin pituutta $|I_j|$,

$$|I_j| = x_j - x_{j-1}.$$



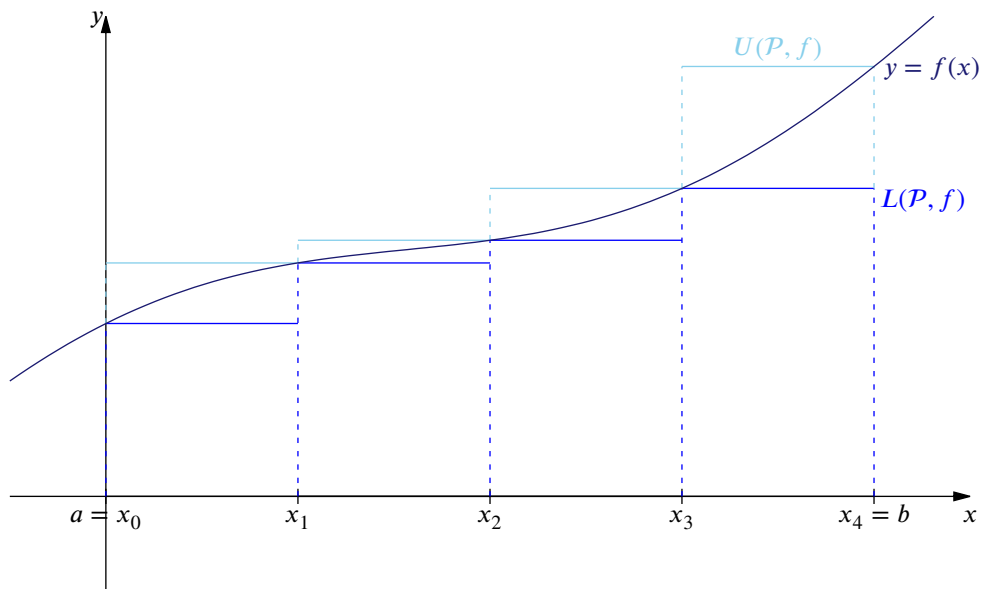
Kuva 28: Suljetun välin $[a, b] \subset \mathbb{R}$ jako \mathcal{P} .

Määritellään jakoa \mathcal{P} vastaavat ylä- ja alasummat

$$U(\mathcal{P}, f) = \sum_{j=1}^N \left(\sup_{x \in I_j} f(x) \right) |I_j|$$

ja

$$L(\mathcal{P}, f) = \sum_{j=1}^N \left(\inf_{x \in I_j} f(x) \right) |I_j|$$



Kuva 29: Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erästä välin $[a, b]$ jakoa \mathcal{P} vastaavat ylä- ja alasummat.

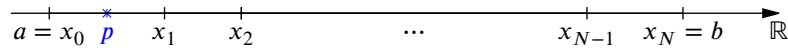
Koska f on rajoitettu, niin supremum ja infimum ovat olemassa. Selvästi

$$U(\mathcal{P}, f) \geq L(\mathcal{P}, f).$$

Funktio f on Riemann-integroituva, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa jako \mathcal{P} siten, että

$$U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f) < \varepsilon.$$

Jotta saadaan integraalin arvo, niin tarvitsemme seuraavan havainnon: jako \mathcal{P}' on jaon \mathcal{P} tihennys eli hienonnus, jos \mathcal{P}' saadaan jaosta \mathcal{P} lisäämällä pisteitä.



Kuva 30: Suljetun välin $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tihennetty jako \mathcal{P}' . Vertaa kuvaan 28, johon lisätty piste p .

Lisäämällä yksi piste kerrallaan, havaitaan

$$U(\mathcal{P}', f) \leq U(\mathcal{P}, f)$$

$$\text{ja } L(\mathcal{P}', f) \geq L(\mathcal{P}, f)$$

Siis, jos \mathcal{P}_1 ja \mathcal{P}_2 ovat kaksi välin $[a, b]$ jakoa ja merkitään yhteistä tihennystä jaolla \mathcal{P}' , niin

$$U(\mathcal{P}_1, f) \geq U(\mathcal{P}', f) \geq L(\mathcal{P}', f) \geq L(\mathcal{P}_2, f).$$

Koska f on rajoitettu, niin on olemassa

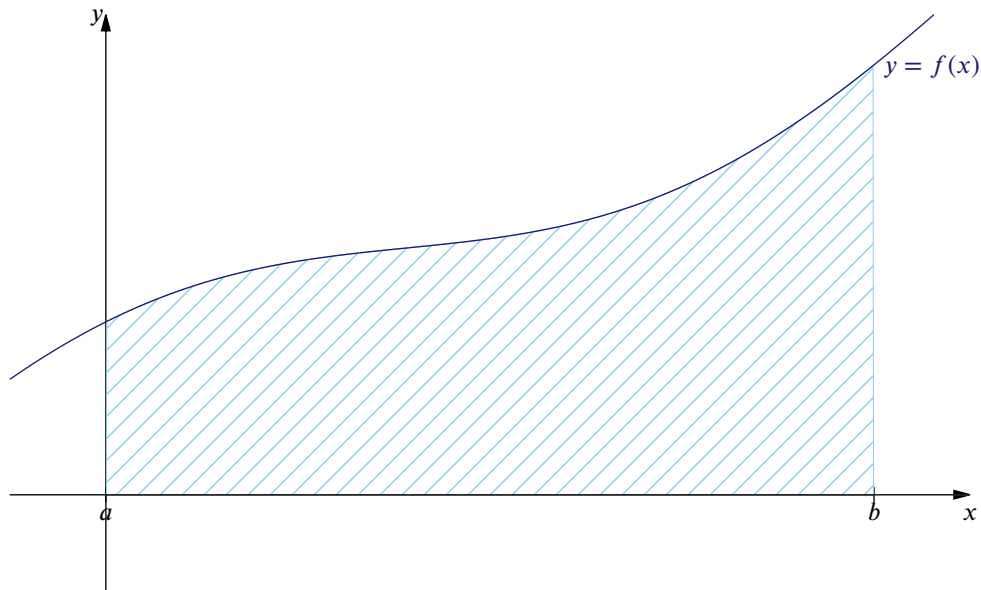
$$\inf_{\mathcal{P}} U(\mathcal{P}, f) =: U$$

$$\text{ja } \sup_{\mathcal{P}} L(\mathcal{P}, f) =: L,$$

missä infimum ja supremum on otettu yli välin $[a, b]$ kaikkien jakojen. Lisäksi $U \geq L$. Jos f on integroituva, niin on oltava $U = L$ ja määritellään, että

$$\int_a^b f(x) dx$$

on tämä yhteinen arvo.



Kuva 31: Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Riemannin integraali $\int_a^b f(x) dx$ välillä $[a, b]$, jolla $f(x) > 0$.

16.2 Riemannin integraali avaruudessa \mathbb{R}^n

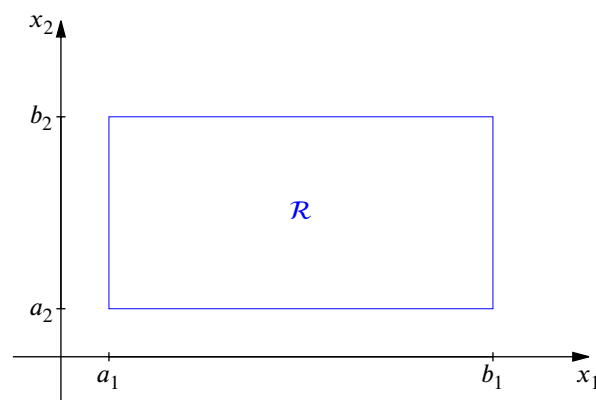
Riemannin integraalin käsite avaruuden \mathbb{R}^n suorakaiteelle $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$ on suora yleistys Riemannin integraalin käsitteestä välillä $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Joukko

$$\mathcal{R} = \{a_j \leq x_j \leq b_j ; 1 \leq j \leq n\},$$

missä $a_j \in \mathbb{R}$ ja $b_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$, on suljettu suorakaide avaruudessa \mathbb{R}^n . Toisin sanoen

$$\mathcal{R} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

on 1-dimensionaalisten suljettujen välien karteeminen tulo.



Kuva 32: Suljettu suorakaide \mathcal{R} avaruudessa \mathbb{R}^n . (Tässä $n = 2$.)

Jos \mathcal{P}_j on suljetun välin $[a_j, b_j]$ jako, niin

$$\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n)$$

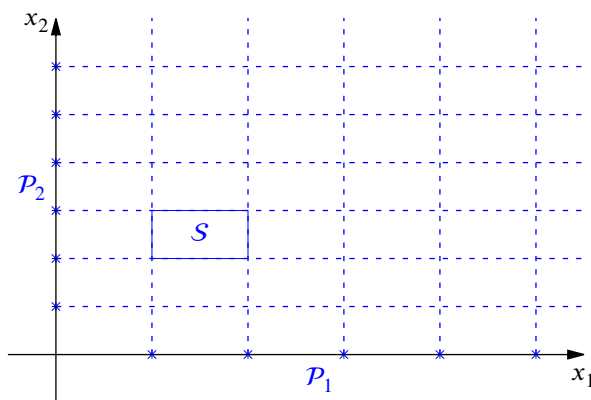
on suorakaiteen \mathcal{R} jako. Jos S_j on jaon \mathcal{P}_j osaväli, niin

$$S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$$

on jaon \mathcal{P} osasuorakaide. Osasuorakaiteen S tilavuus $|S|$ on sen sivujen pituuksien tulo

$$|S| = |S_1| \times |S_2| \times \dots \times |S_n|,$$

missä $|S_j|$ on välin S_j pituus.



Kuva 33: Jakojen \mathcal{P}_1 ja \mathcal{P}_2 osasuorakaide $S = S_1 \times S_2$. (Avaruudessa \mathbb{R}^n , tässä $n = 2$.)

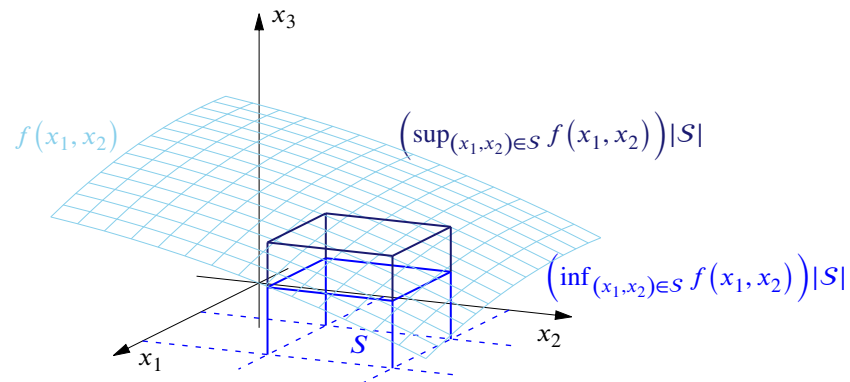
Nyt olemme valmiit määrittelemään integraalin yli suorakaiteen \mathcal{R} .

Olkoon annettu rajoitettu reaaliarvoinen funktio f , joka on määritelty suorakaiteessa \mathcal{R} , jolle on annettu jako \mathcal{P} . Määritellään funktion f ylä- ja alasummat jaon \mathcal{P} suhteen:

$$U(\mathcal{P}, f) = \sum \left(\sup_{x \in S} f(x) \right) |S|,$$

$$L(\mathcal{P}, f) = \sum \left(\inf_{x \in S} f(x) \right) |S|,$$

missä summat on otettu yli jaon \mathcal{P} kaikkien osajakojen. Nämä määritelmät ovat suoria yleistyksiä vastaavista merkinnöistä 1-ulotteisissa tapauksissa.



Kuva 34: Funktion $f(x_1, x_2)$ yläosasumma $\left(\sup_{(x_1, x_2) \in S} f(x_1, x_2)\right)|S|$ ja alaosasumma $\left(\inf_{(x_1, x_2) \in S} f(x_1, x_2)\right)|S|$ yksittäisessä osasuorakaiteessa S .

Jako $\mathcal{P}' = (\mathcal{P}'_1, \mathcal{P}'_2, \dots, \mathcal{P}'_n)$ on jaon $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n)$ tihennys, jos jokainen \mathcal{P}'_j on jaon \mathcal{P}_j tihennys.

Vastaavasti, kuten 1-ulotteisessa tapauksessa, saamme:

Jos määrittelemme

$$U := \inf_{\mathcal{P}} U(\mathcal{P}, f)$$

$$\text{ja } L := \sup_{\mathcal{P}} L(\mathcal{P}, f),$$

niin U ja L ovat olemassa äärellisinä ja $U \geq L$.

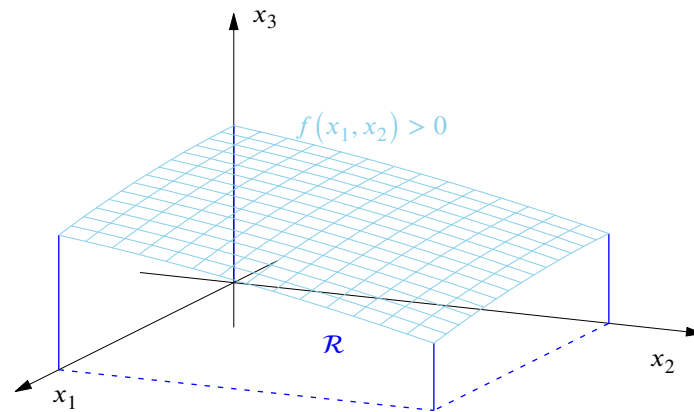
Funktio f on Riemann-integroituva suorakaiteen \mathcal{R} yli eli Riemann-integroituva suorakaiteessa \mathcal{R} , jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa jako \mathcal{P} siten, että

$$U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f) < \varepsilon.$$

Siis $U = L$ ja tätä yhteistä arvoa, jota merkitsemme joko

$$\int_{\mathcal{R}} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad \text{tai} \quad \int_{\mathcal{R}} f(x) \quad \text{tai} \quad \int_{\mathcal{R}} f$$

sanomme funktion f integraaliksi yli suorakaiteen \mathcal{R} .



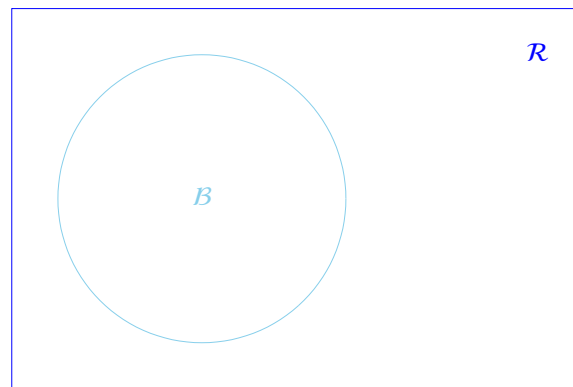
Kuva 35: Funktion $f(x_1, x_2)$ integraali $\int_{\mathcal{R}} f(x_1, x_2)$ yli suorakaiteen \mathcal{R} . Eli x_1x_2 -tasolla olevan suorakaiteen \mathcal{R} ja funktion $f(x_1, x_2)$ pinnan välisen avaruuden osan tilavuus.

Huomautus Jatkossa olemme kiinnostuneita lähinnä jatkuvista funktioista. Jos f on jatkuva suljetussa suorakaiteessa, niin f on integroitava.

Huomautus Jos funktio f on jatkuva suljetussa pallossa, niin voimme määrittellä funktion f integraalin yli pallon \mathcal{B} seuraavasti:

Jos g on funktion f laajennus siten, että $g(x) = 0$, kun $x \notin \mathcal{B}$ ja g on integroitava missä tahansa suorakaiteessa \mathcal{R} , joka sisältää pallon \mathcal{B} , niin

$$\int_{\mathcal{B}} f(x) dx = \int_{\mathcal{R}} g(x) dx.$$



Kuva 36: Suorakaide \mathcal{R} , joka sisältää pallon \mathcal{B} , eli $\mathcal{B} \subset \mathcal{R}$.

16.3 Iteroiduista integraaleista

Analyysin peruslause¹ antaa meidän laskea monia 1-ulotteisia integraaleja, koska antiderivaatta on monissa tapauksissa löydettävissä.

¹Olkoon $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ ja derivoitua avoimella välillä (a, b) . Jos g' on integroitava välillä $[a, b]$, niin $\int_a^b g' = g(b) - g(a)$.

Avaruudessa \mathbb{R}^n tämä antaa mahdollisuuden laskea multi-integraaleja, koska n -dimensionaalinen integraali voidaan palauttaa tietyillä oletuksilla n kappaaleeseen 1-ulotteisia integraaleja.

Lause 16.4. Olkoon f jatkuva funktio suljetussa suorakaiteessa $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$.

Olkoon $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$, missä $\mathcal{R}_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ ja $\mathcal{R}_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ ja $n_1 + n_2 = n$.

Jos merkitsemme $x = (x_1, x_2)$, missä $x_j \in \mathbb{R}^{n_j}$, $j = 1, 2$, niin

$$F(x_1) = \int_{\mathcal{R}_2} f(x_1, x_2) dx_2$$

on jatkuva joukossa \mathcal{R}_1 ja

$$\int_{\mathcal{R}} f(x) dx = \int_{\mathcal{R}_1} \left(\int_{\mathcal{R}_2} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1.$$

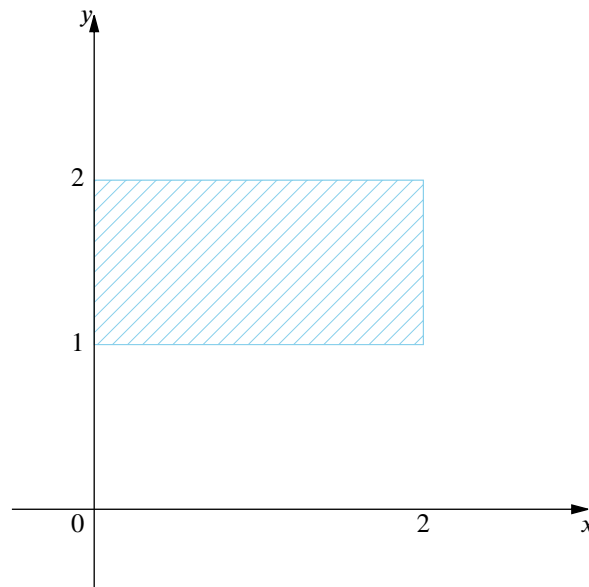
Korollaari 16.5. Jos f on jatkuva suorakaiteessa $\mathcal{R} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$, niin

$$\int_{\mathcal{R}} f(x) dx = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\dots \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \right) dx_{n-1} \right) \dots \right) dx_2 \right) dx_1,$$

missä oikealla puolella on n kappaletta 1-ulotteisia integraaleja.

Esimerkki 16.6 Olkoon $f : [0, 2] \times [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x - 3y^2$,

missä $\mathcal{R} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$ ja f on jatkuva. Etsi/määrä $\int_{\mathcal{R}} f$.



Kuva 37: Esimerkin 16.6 joukko \mathcal{R} , jonka ylitse kysytty integraali lasketaan.

Ratkaisuehdotus. Korollarin 16.5 nojalla

$$\int_{\mathcal{R}} f = \int_0^2 \int_1^2 (x - 3y^2) dy dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^2 \int_1^2 (xy - y^3) \, dx \\
&= \int_0^2 (x - 7) \, dx \\
&= \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - 7x \right) \, dx = -12.
\end{aligned}$$

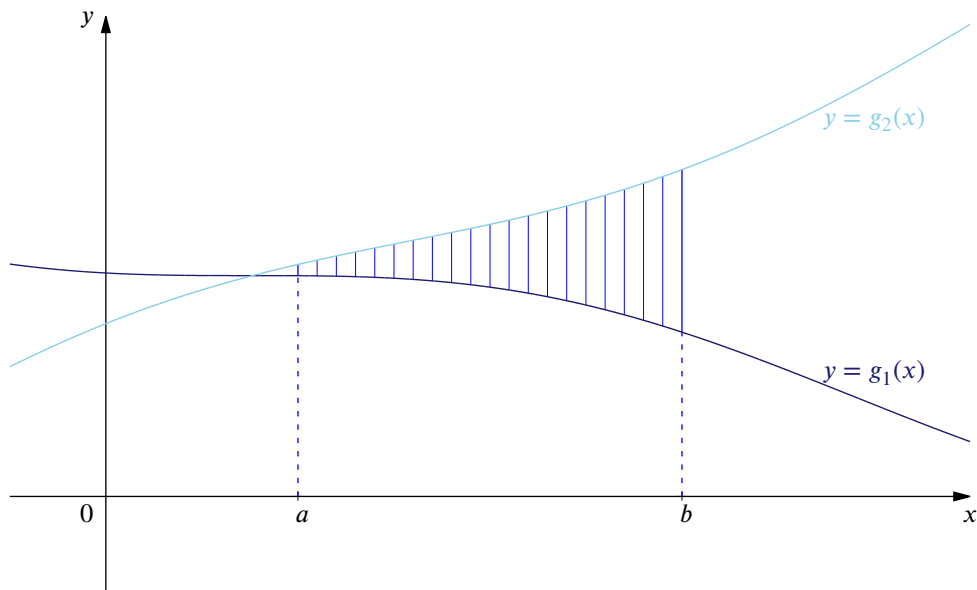
Huomautus 16.7 Joukko D on tyyppiä 1, jos jatkuville funktioille $g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \right\}$$

Olkoon funktio f jatkuva. Silloin

$$\int_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \, dx.$$

Siis sisemmässä integraalissa pidetään muuttuja x kiinnitettynä.



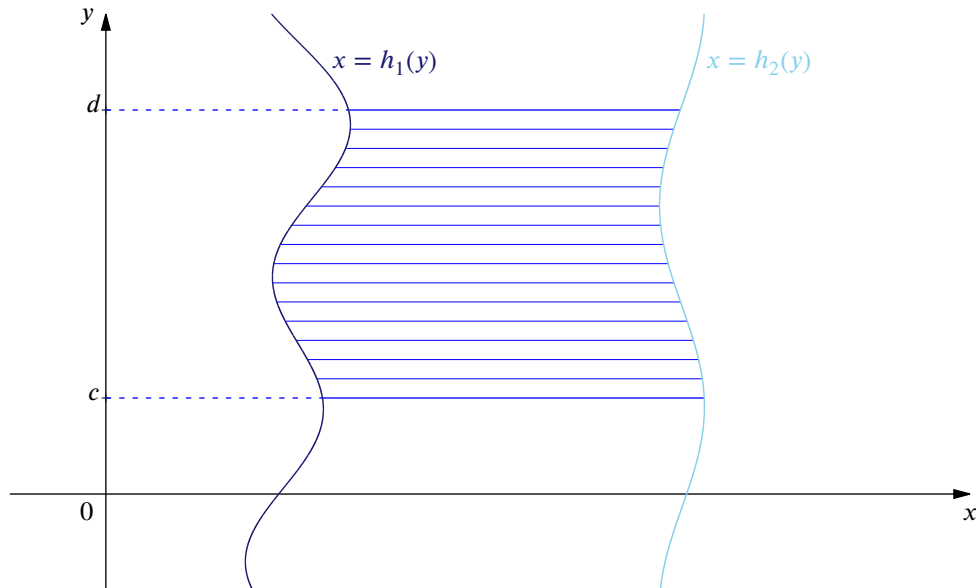
Kuva 38: Huomautuksen 16.7 tyyppin 1 joukko D .

Huomautus 16.8 Joukko D on tyyppiä 2, jos jatkuvien funktioiden $h_1, h_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ avulla

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \right\}$$

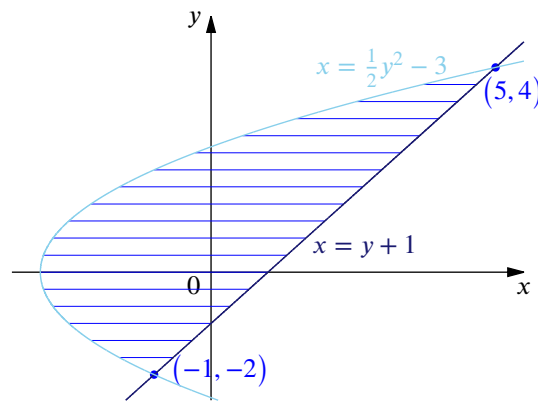
Olkoon funktio f jatkuva. Silloin

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy.$$



Kuva 39: Huomautuksen 16.8 tyypin 2 joukko D .

Esimerkki 16.9 Määrä $\int_D xy dx dy$, missä D on suljettu joukko, jota rajaavat suora $y = x - 1$ ja paraabeli $y^2 = 2x + 6$.



Kuva 40: Esimerkin 16.9 joukko D .

Ratkaisuehdotus. Tyypin 2 avulla helpompi ratkaista.

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq y \leq 4, \frac{1}{2}y^2 - 3 \leq x \leq y + 1 \right\},$$

$(x, y) \mapsto xy$ on jatkuva,

$$\begin{aligned}
 \int_D xy \, dx \, dy &= \int_{-2}^4 \left(\int_{x=\frac{1}{2}y^2-3}^{x=y+1} xy \, dx \right) dy \\
 &= \int_{-2}^4 \left[\frac{1}{2}x^2y \right]_{\frac{1}{2}y^2-3}^{y+1} dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-2}^4 y \left((y+1)^2 - \left(\frac{1}{2}y^2 - 3 \right)^2 \right) dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-2}^4 y \left(y^2 + 2y + 1 - \left(\frac{1}{4}y^4 + 9 - 3y^2 \right) \right) dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-2}^4 y \left(4y^2 + 2y - 8 - \frac{1}{4}y^4 \right) dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-2}^4 \left(4y^3 + 2y^2 - 8y - \frac{1}{4}y^5 \right) dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-2}^4 \left(y^4 + \frac{2}{3}y^3 - 4y^2 - \frac{1}{24}y^6 \right) dy \\
 &= \frac{1}{2} \left(\left(4^4 + \frac{2}{3} \cdot 4^3 - 4 \cdot 4^2 - \frac{1}{24} \cdot 4^6 \right) - \left((-2)^4 + \frac{2}{3} \cdot (-2)^3 - 4 \cdot (-2)^2 - \frac{1}{24} \cdot (-2)^6 \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(256 + \frac{128}{3} - 64 - \frac{512}{3} - 16 + \frac{16}{3} + 16 + \frac{8}{3} \right) = \frac{72}{2} = \underline{\underline{36}}.
 \end{aligned}$$

Huomautus

1. Jos $D \subset \mathbb{R}^2$, niin

$$\int_D dx \, dy = \int_D 1 \, dx \, dy$$

on joukon D pinta-ala.

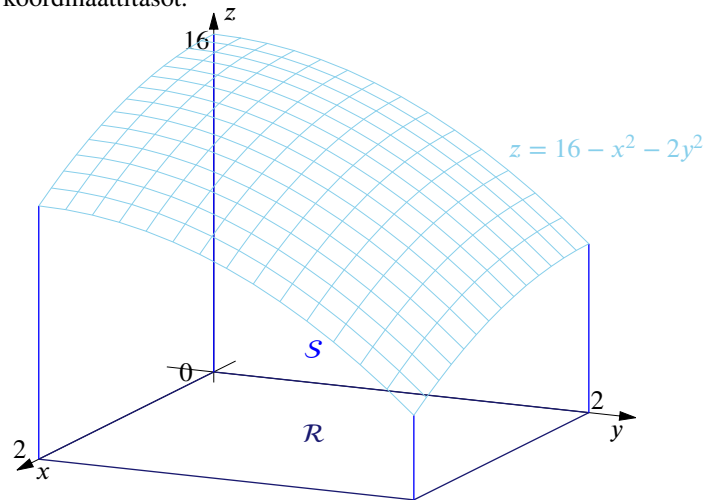
2. Jos $D \subset \mathbb{R}^3$, niin

$$\int_D dx \, dy \, dz = \int_D 1 \, dx \, dy \, dz$$

on joukon D tilavuus.

Oletamme, että joukon $D \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, reuna on n -nollajoukko.

Esimerkki 16.10 Määää joukon S tilavuus, jota rajaavat elliptinen paraboloidi $x^2 + 2y^2 + z = 16$ ja tasot $x = 2$ ja $y = 2$, sekä koordinaattitasot.



Kuva 41: Esimerkin 16.10 joukko S , jonka tilavuus halutaan laskea. Joukko S on joukon \mathcal{R} ja pinnan $z = 16 - x^2 - 2y^2$ väliin jäävä tila.

Ratkaisuehdotus. Joukko S on pinnan $z = 16 - x^2 - 2y^2$ alla ja neliön $\mathcal{R} = [0, 2] \times [0, 2]$ yläpuolella.

$$\begin{aligned} \text{vol}(S) &= \int_{\mathcal{R}} (16 - x^2 - 2y^2) \, dx \, dy \\ &= \int_0^2 \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2) \, dx \, dy \\ &= \int_0^2 \int_0^2 \left(16x - \frac{1}{3}x^3 - 2y^2x \right) \, dx \, dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{88}{3} - 4y^2 \right) \, dy = \underline{\underline{48}}. \end{aligned}$$

16.11 Integraalin ominaisuuksia funktion suhteen

1. Lineaarisuus

$$\int_D (f + g) = \int_D f + \int_D g \quad \text{ja} \quad \int_D \lambda f = \lambda \int_D f, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Monotonisuus

$$\text{Jos } f(x) \geq g(x) \text{ kaikilla } x \in D, \text{ niin } \int_D f(x) \, dx \geq \int_D g(x) \, dx.$$

16.12 Nollajoukon käsite

Joukko $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ on n -nollajoukko, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa numeroituva joukkoperhe (I_k) , $k \in \mathbb{N}$, välejä $I_k \subset \mathbb{R}^n$ siten, että

$$\mathcal{A} \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k \quad \text{ja} \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} |I_k| < \varepsilon.$$

Esimerkki (1)

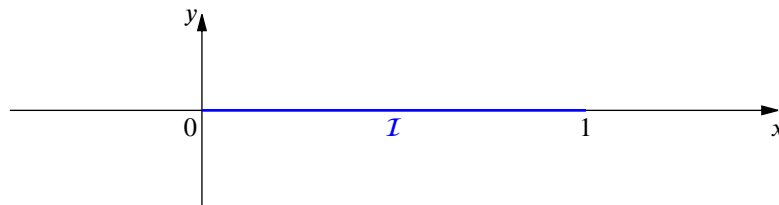
$$\mathcal{I} = \left\{ (t, 0), 0 \leq t \leq 1 \right\}$$

on 2-nollajoukko tasossa:

$$I_\varepsilon = [0, 1] \times \left[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2} \right], \quad \varepsilon > 0.$$

Esimerkki (2) Jatkuvan funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ graafi on $(n+1)$ -nollajoukko, $\mathcal{I}_f \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

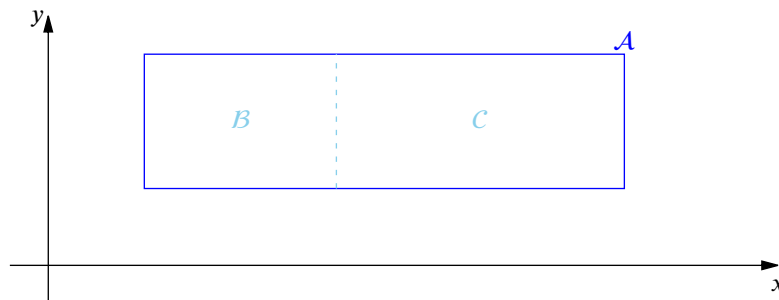
Esimerkki (3) k -ulotteinen taso $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^n$ on n -nollajoukko, kun $k < n$.



Kuva 42: Kappaleen 16.12 esimerkin 1 nollajoukko \mathcal{I} .

Lause 16.13: Additiivisuus joukon suhteen. Olkoon $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu, $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$, missä $\partial \mathcal{B}$, $\partial \mathcal{C}$ ja $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ ovat n -nollajoukkoja. Silloin joukossa \mathcal{A} Riemann-integroituvalle funktiolle f pätee

$$\int_{\mathcal{A}} f = \int_{\mathcal{B} \cup \mathcal{C}} f = \int_{\mathcal{B}} f + \int_{\mathcal{C}} f$$



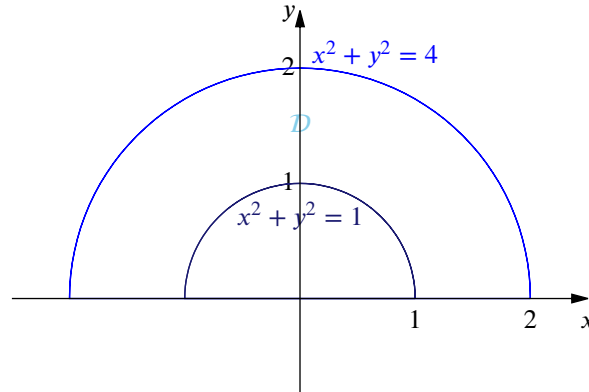
Kuva 43: Lauseen 16.13 joukko $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$.

Huomautus 16.14 Jos on määrättävä integraali $\int_D f(x, y) dx dy$ ja D on muotoa

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0 \right\}$$

niin on helpompi laskea integraali, jos joukko D esitetään napakoordinaateissa:

$$\{(r, \theta) \mid 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$



Kuva 44: Huomautuksen 16.14 joukko D .

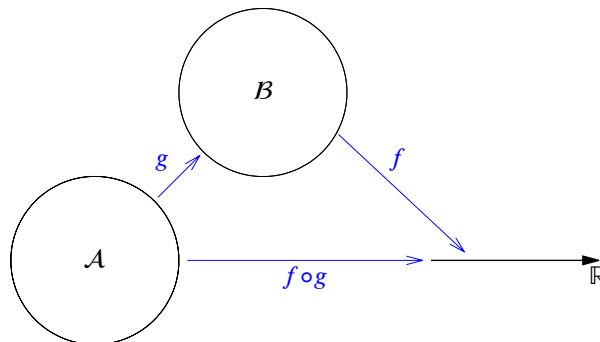
16.15 Muuttujanvaihtokaava (karkeasti)

Olkoon $g : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ diffeomorfismi, g on jatkuvasti differentioituva ja sillä on käänteiskuvaus $g^{-1} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$, joka on myös jatkuvasti differentioituva.

Lause *Olkoon $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ ja $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ avaruuden \mathbb{R}^n kompakteja joukkoja. Olkoon $g : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ diffeomorfismi.*

Jos f on jatkuva joukossa \mathcal{B} , niin

$$\int_{\mathcal{B}} f = \int_{g(\mathcal{A})} f = \int_{\mathcal{A}} (f(g(y))) |J_g(y)| dy.$$



Kuva 45: Karkeasti määritellyn muuttujanvaihtokaavan (kappaleen 16.15 lause) kuvauksien g ja f , sekä niiden yhdistetyn kuvauksen $f \circ g$ lähtö- ja maalijoukot.

Kun $n = 2$, tämän lauseen todistus sisältää erityisesti sen, kun g on lineaarinen. Tällöin suorakaiteelle \mathcal{R}

pätee:

$$\underbrace{|g(\mathcal{R})|}_{\text{suorakaiteen } \mathcal{R} \text{ kuvan pinta-ala}} = |\det(g)| \underbrace{|\mathcal{R}|}_{\text{suorakaiteen pinta-ala}},$$

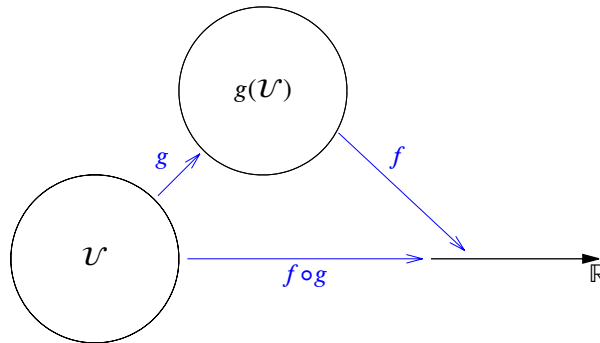
mikä selittää termiä $|J_g|$. Tämä vastaa uutta infinitesimaalista pinta-alan elementtiä muuttujanvaihdon jälkeen.

16.16 Muuttujanvaihtolause tarkemmin

Olkoon $g : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$ jatkuvasti differentioituva, $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Oletetaan, että $\mathcal{U} \subset \mathcal{W}$ on rajoitettu, $\overline{\mathcal{U}} \subset \mathcal{W}$, $\partial\mathcal{U}$ on n -nollajoukko ja $g : (\text{int } \mathcal{U}) \setminus \mathcal{N} \rightarrow g((\text{int } \mathcal{U}) \setminus \mathcal{N})$ on diffeomorfismi, missä $\mathcal{N} \subset \overline{\mathcal{U}}$ on n -nollajoukko.

Jos rajoitettu kuvaus $f : g(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{R}$ on integroituva, niin $(f \circ g)|J_g| : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ on integroituva ja $\int_{g(\mathcal{U})} f = \int_{\mathcal{U}} (f \circ g)|J_g|$ eli

$$\int_{g(\mathcal{U})} f(x) dx = \int_{\mathcal{U}} (f \circ g)(u) |J_g(u)| du$$



Kuva 46: Tarkemmin määritellyn muuttujanvaihtolauseen (kappale 16.16) kuvauksien g ja f , sekä niiden yhdistetyn kuvauksen $f \circ g$ lähtö- ja maalijoukot.

Esimerkki 16.17 (Integraali napakoordinaatistossa) Katso esimerkki 12.8.

Olkoon

$$\mathcal{A} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0, y \geq 0 \right\},$$

$$f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto y - x,$$

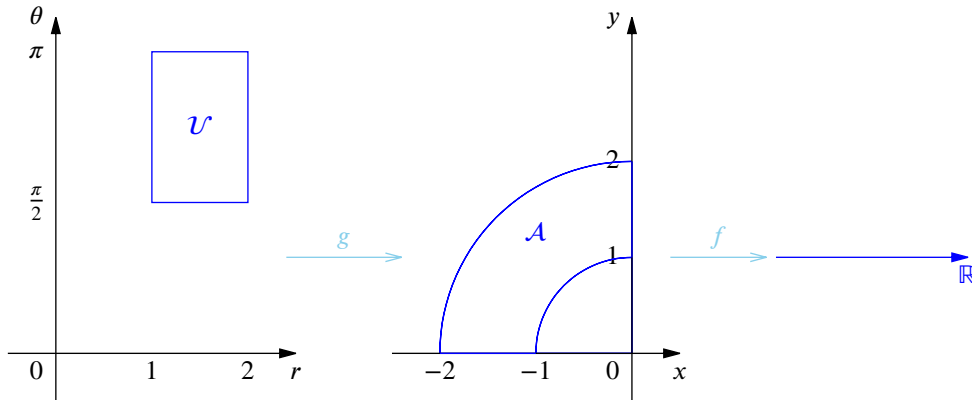
$$g : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus [0, \infty), g : (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \text{ on diffeomorfismi, } J_g(\mathcal{U}) = r,$$

$$\mathcal{U} = [1, 2] \times \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right], g(\mathcal{U}) = \mathcal{A}.$$

Nyt integraali

$$\int_{g(\mathcal{U})} f = \int_{\mathcal{U}} (f \circ g)(u) |J_g(u)| du$$

$$= \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{r=1}^{r=2} (r \sin \theta - r \cos \theta) r \, dr \, d\theta = \underline{\underline{\frac{14}{3}}}.$$



Kuva 47: Esimerkin 16.17 funktioiden g ja f lähtö- ja maalijoukot.

16.18 Sylinterikoordinaattikuvaus avaruudessa \mathbb{R}^3

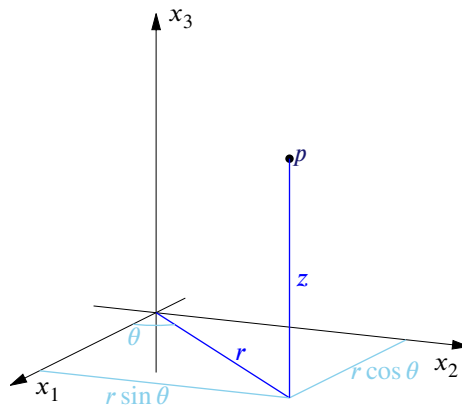
Kuvaus

$$g : \mathcal{W} = (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad g(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

on jatkuvasti differentioituva injektio.

$$J_g(r, \theta, z) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

$$\text{ja } g(\mathcal{W}) = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ (x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \right\}.$$



Kuva 48: Kappaleen 16.18 sylinterikoordinaatit pisteelle $p \in \mathbb{R}^3$.

16.19 Pallokoordinaattikuvaus avaruudessa \mathbb{R}^3

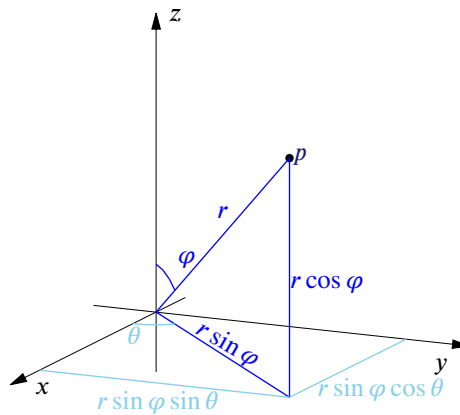
Kuvaus

$$g : \mathcal{W} = (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad g(r, \theta, \varphi) = (r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi)$$

on jatkuvasti differentioituva injektio.

$$J_g(r, \theta, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \varphi & 0 & -r \sin \varphi \end{vmatrix} = r^2 \sin \varphi$$

$$\text{ja } g(\mathcal{W}) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0\}.$$



Kuva 49: Kappaleen 16.19 pallokoordinaatit pisteelle $p \in \mathbb{R}^3$.

Esimerkki 16.20

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq z \leq 6\},$$

$$f(x, y, z) = z(x^2 + y^2), \quad \int_S f \, dx \, dy \, dz = ?$$

Sylinterikoordinaattimuunnoksen avulla

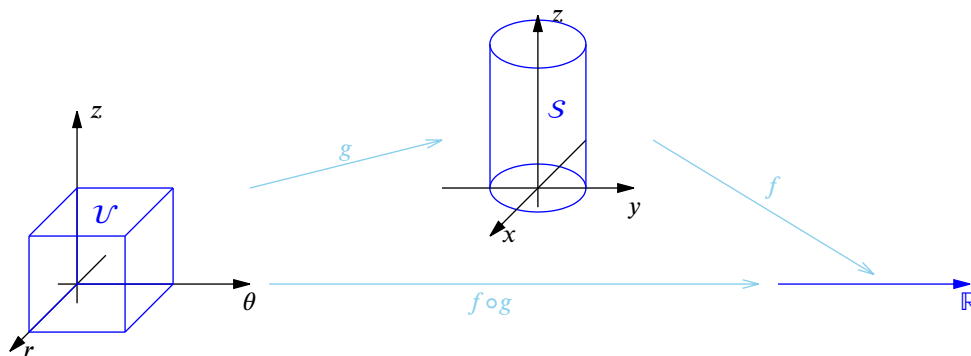
$$g(r, \theta, z) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, z), \quad J_g(r, \theta, z) = r,$$

$$g(\mathcal{U}) = S, \quad \mathcal{U} = [0, 3] \times [0, 2\pi] \times [0, 6],$$

$$g : \text{int } \mathcal{U} \longrightarrow g(\text{int } \mathcal{U}) \text{ diffeomorfismi.}$$

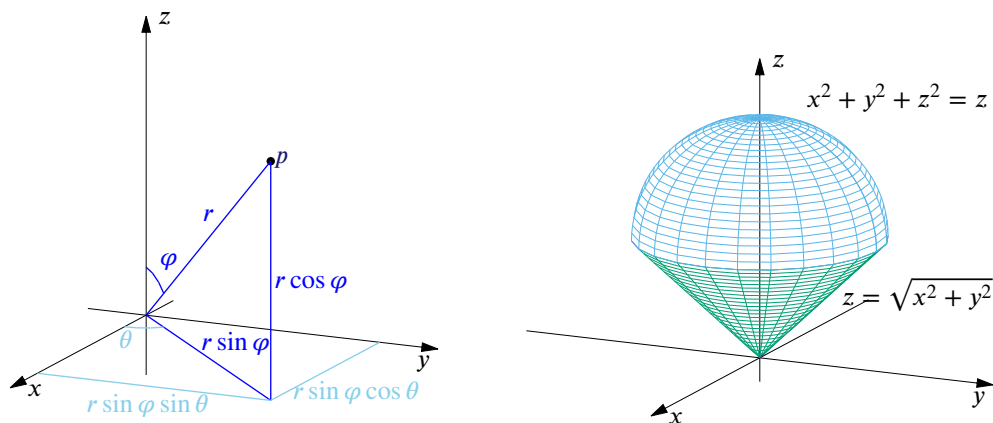
$$\begin{aligned} \int_S f \, dx \, dy \, dz &= \int_{g(\mathcal{U})} f \, dx \, dy \, dz = \int_{\mathcal{U}} (f \circ g)(u) |J_g(u)| \, du \\ &= \int_0^3 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^6 z r^2 r \, dz \, d\theta \, dr = \int_0^3 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^6 \left(\frac{1}{2} z^2 r^3 \right) \, dz \, d\theta \, dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^3 \int_{\theta=0}^{2\pi} 18r^3 \, d\theta \, dr = \int_0^3 \int_{\theta=0}^{2\pi} (18\theta r^3) \, d\theta \, dr \\
 &= \int_0^3 36\pi r^3 \, dr = \int_0^3 \frac{36\pi}{4} r^4 = \underline{\underline{729\pi}}.
 \end{aligned}$$



Kuva 50: Esimerkin 16.20 funktioiden \$g\$ ja \$f\$, sekä yhdistetyn funktion \$f \circ g\$ lähtö- ja maalijoukot.

Esimerkki 16.21 Määrä jätelötöterön tilavuus: tötteröä rajaavat alhaalta kartio \$z = \sqrt{x^2 + y^2}\$ ja ylhäältä pallonkuori \$x^2 + y^2 + z^2 = z\$.



(a) Piste \$p \in \mathbb{R}^3\$ pallokoordinaatit.

(b) Jätelötöterö.

Kuva 51: Esimerkissä 16.21 käytetty pallokoordinaattimuunnos \$h : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) \to \mathbb{R}^3\$, \$(r, \theta, \varphi) \mapsto (r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi)\$, jolle \$J_h(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin \varphi\$ ja jätelötöterön muotoinen pinta.

Ratkaisuehdotus. Pallon $x^2 + y^2 + z^2 \leq z$ keskipiste on $(0, 0, \frac{1}{2})$ ja säde $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= z \\x^2 + y^2 + z^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} &= \frac{1}{4} \\x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Kartio $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ avautuu kulmassa $\frac{\pi}{4}$,

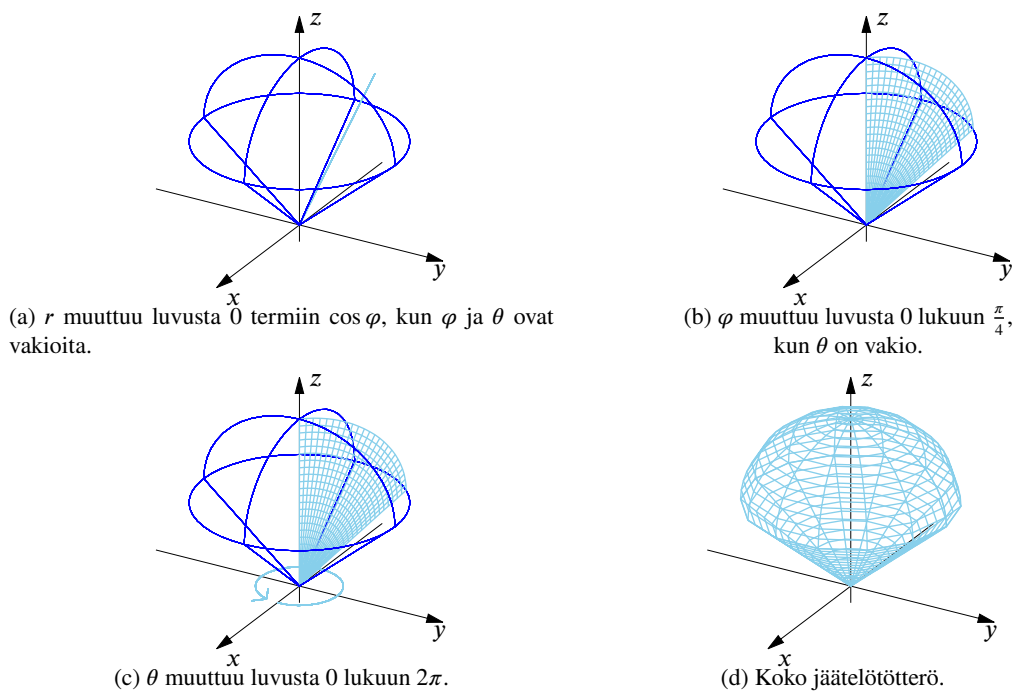
$$\begin{aligned}r \cos \varphi &= \sqrt{(r \sin \varphi \cos \theta)^2 + (r \sin \varphi \sin \theta)^2} = r \sin \varphi \\ \varphi &= \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Pallon kuori pallokoordinaateissa:

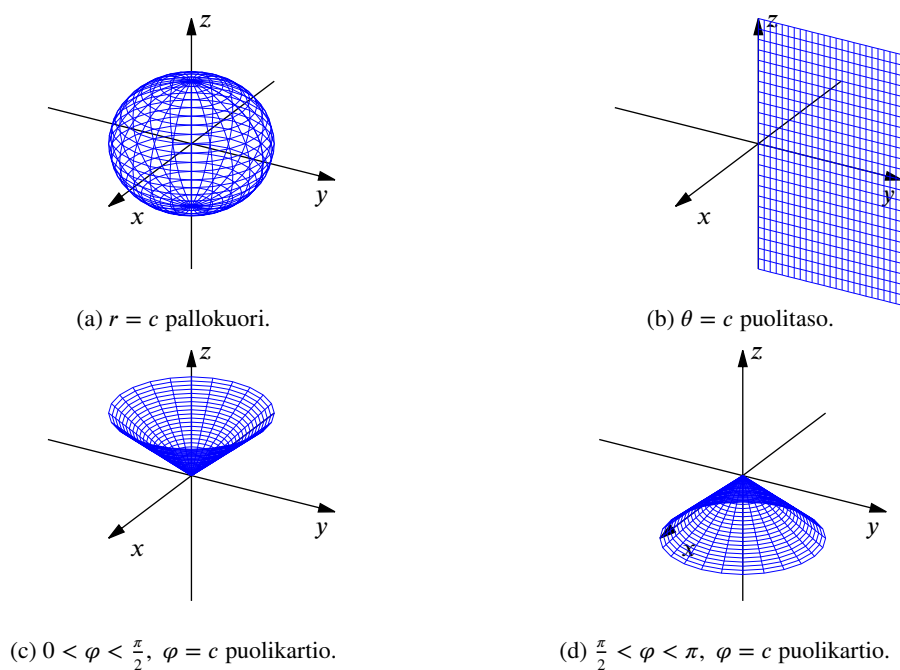
$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= z \\ r^2 &= r \cos \varphi \\ r &= \cos \varphi \\ 0 \leq r &\leq \cos \varphi.\end{aligned}$$

Siis jäätelötötterö on $\mathcal{J}\mathcal{T} = \left\{ (r, \theta, \varphi) \mid 0 \leq r \leq \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}$ ja muuttujanvaihtokaavan nojalla

$$\text{vol}(\mathcal{J}\mathcal{T}) = \int_{\mathcal{J}\mathcal{T}} dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\cos \varphi} \underbrace{r^2 \sin \varphi}_{|\text{Jacobin}|} dr d\varphi d\theta = \frac{\pi}{8}.$$



Kuva 52: Esimerkin 16.21 integroimisvälit.



Kuva 53: Muuttujan (r, θ, φ) jokainen komponentti on erikseen vakiona.

17 Epäoleellisista integraaleista

17.1 Integraali yli avaruuden \mathbb{R}^n , $n \geq 2$

Olkoon $N > 0$ kiinnitetty. Tarkastellaan origokeskisiä kuutioita

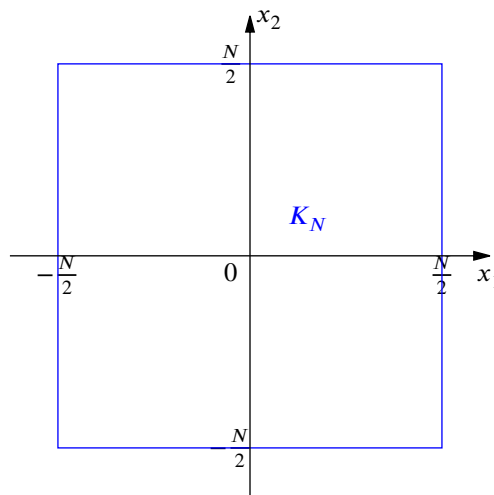
$$K_N = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_j| \leq \frac{N}{2}, j = 1, \dots, n \right\},$$

joiden sivun pituus on N . Olkoon $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ jatkuva funktio. Jos on olemassa raja-arvo

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{K_N} f(x) dx,$$

niin

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{K_N} f(x) dx.$$



Kuva 54: Avaruuden \mathbb{R}^2 origokeskinen kuutio (neliö) K_N , jonka sivun pituus on N .

Esimerkissä tarkastelemme seuraavia jatkuvia funktioita $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, joilla

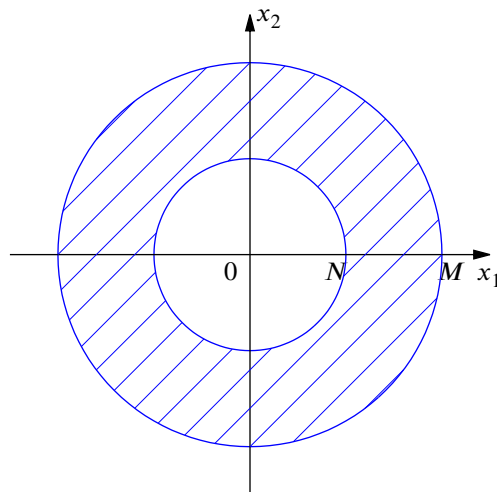
$$|f(x)| \leq \frac{A}{1 + |x|^{n+1}}, \text{ jollakin vakiolla } A > 0.$$

Tällöin edellä oleva raja-arvo on olemassa. Merkitään

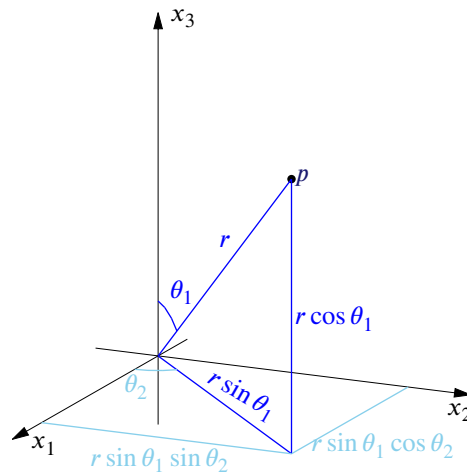
$$\mathcal{I}_N = \int_{B_N} f(x) dx, \quad B_N = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \|x\|^2 \leq N^2 \right\}.$$

Jokainen \mathcal{I}_N on olemassa, koska f on jatkuva suljetussa pallossa. Olkoon $M > N$. Silloin

$$|\mathcal{I}_M - \mathcal{I}_N| = \int_{B_M \setminus B_N} |f(x)| dx \leq A \int_{B_M \setminus B_N} \underbrace{\frac{dx}{1 + |x|^{n+1}}}_{\geq |x|^{n+1}} \leq A \int_{B_M \setminus B_N} \frac{dx}{|x|^{n+1}}.$$



Kuva 55: Joukko $B_M \setminus B_N$ avaruudessa \mathbb{R}^2 on origokeskisten pallojen B_M ja B_N erotus.



Kuva 56: Piste $p \in \mathbb{R}^3$ pallokoordinaatit.

Olkoon $n = 3$: Pallokoordinaattien avulla

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ x_2 &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ x_3 &= r \cos \theta_1, \end{aligned}$$

missä $0 < \theta_1 < \pi$, $0 < \theta_2 < 2\pi$, $|J(r, \theta_1, \theta_2)| = r^2 \sin \theta_1$. Nyt

$$\int_{B(0,M) \setminus B(0,N)} \|x\|^\lambda dx = c \left(M^{\lambda+3} - N^{\lambda+3} \right), \quad n = 3, \quad \lambda \neq -3.$$

Siis $|\mathcal{I}_M - \mathcal{I}_N| \stackrel{\lambda=-4}{\leq} c \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{M} \right)$. Siis jono (\mathcal{I}_N) on Cauchy jono ja $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$ on olemassa.

Lause 17.2: Iteroitu integraali. Jos f on jatkuva tasossa \mathbb{R}^2 ja $|f(x)| \leq \frac{A}{1+|x|^3}$, $A > 0$ vakio, kaikilla x , niin

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2) dx_2 dx_1.$$

Huomautus 17.3 Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ epäoleellisen integraalin suppeneminen on itseistä suppenemistä: itseisarvofunktion $|f|$ integraalin tulee olla suppeneva. Yleensä funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ rajoittamaton (meillä esimerkissä $D = \mathbb{R}^n$), epäoleellisen integraalin selvittämiseen on tutkittava (1) itseisarvofunktion $|f|$ integraalin suppeneminen tai (2) sekä positiiviosan f^+ että negatiiviosan f^- integraalien suppeneminen.

$$(f^+(x) = \max \{0, f(x)\}, f^-(x) = -\min \{0, f(x)\})$$

(Jos) suppeneminen tiedetään, (niin) $\int_D f = \int_D f^+ - \int_D f^-$.

Esimerkki 17.4 (Varoittava esimerkki) Olkoon

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, -\frac{1}{x} < y < \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right\}, f : D \rightarrow \mathbb{R} : (x, t) \mapsto xy.$$

Silloin

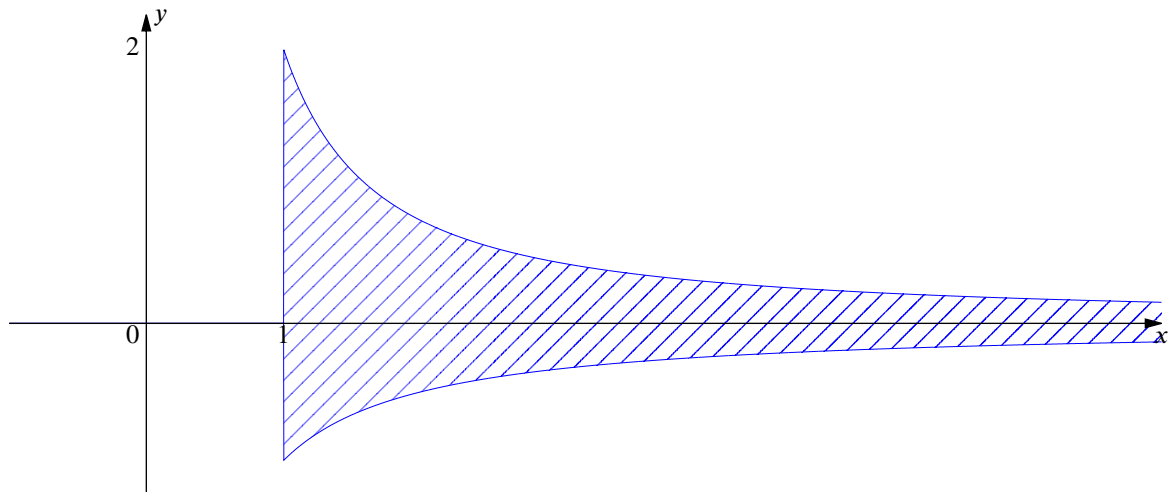
$$D_k = \{(x, y) \in D : x \leq k\}, k \in \mathbb{N} \text{ tyhjennysjoukot } \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{D_k} f dx = \frac{5}{4}.$$

Olkoon nyt

$$G_k = D_k \cup \{(x, y) \in D : x \leq g(x), y \geq 0\}, k \in \mathbb{N},$$

missä g on aidosti kasvava ja $g(k) \geq k$. Jos $g(k) = e^{2c}k$, $c \geq 0$, niin

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{G_k} f dx = \frac{5}{4} + C.$$



Kuva 57: Esimerkin 17.4 joukko D .

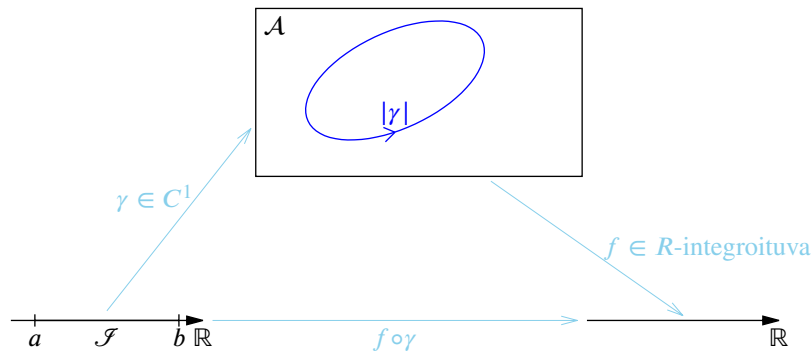
Huomautus Luvun 17 alkuosa on viitteestä [8]. Huomautus 17.3 ja esimerkki 17.4 ovat suoraan viitteestä [5].

18 Käyräintegraalista

18.1 Reaaliarvoisen funktion käyräintegraali

Määritelmä Olkoon $\mathcal{J} = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ja $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ jatkuvasti differentioituva polku (paloittain C^1 -polku riittää). Jos $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ on Riemann-integroituva, niin funktion f käyräintegraali polun γ kaarenpituuden suhteen eli reaaliarvoisen funktion f käyräintegraali polun γ suhteen (eli polkuintegraali eli "line integral") on

$$\int_{\gamma} f \, ds := \int_{\mathcal{J}} (f \circ \gamma) \|\gamma'\| = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt.$$



Kuva 58: Kappale 18.1, reaaliarvoisen funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ käyräintegraali polun γ kaarenpituuden suhteen määritelmän yhdistetty kuvaus $f \circ \gamma$.

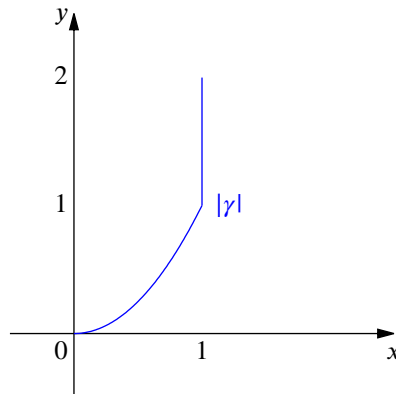
Huomautuksia

- (1) Kertaa polkujen teoriaa Luvusta 11.
- (2) Huomaa yhteys muuttujan vaihtoon, Luku 16.
- (3) Integraali on riippumaton
 - polun kulkusuunnasta
 - polun parametrisoinnista.
- (4) $\int_{\gamma} ds =$ polun γ pituus.
- (5) Geometrinen tulkinta on aidan pinta-ala, kun korkeus pisteessä $\gamma(t)$ on $f(\gamma(t))$, $t \in [a, b]$.

Esimerkki (käyräintegraalista) Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 2x$. Siis f on jatkuva. Olkoon

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, t^2), & 0 \leq t \leq 1 \\ (1, t), & 1 \leq t \leq 2, \end{cases}$$

γ on paloittain C^1 -polku, $\gamma : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$.



Kuva 59: Kappaleen 18.1 esimerkin (yllä) polku γ .

Merkitään

$$\begin{aligned} \gamma(t) &=: u(t), \quad t \in [0, 1] \\ \text{ja } \gamma(t) &=: v(t), \quad t \in [1, 2]. \end{aligned}$$

Silloin $u'(t) = (1, 2t)$, $v'(t) = (0, 1)$ ja $\|u'(t)\|^2 = 1 + 4t^2$, $\|v'(t)\|^2 = 1$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(u(t)) \|u'(t)\| dt &= \int_0^1 2t \sqrt{1 + 4t^2} dt = \frac{1}{4} \int_0^1 8t \sqrt{1 + 4t^2} dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{2}{3} (1 + 4t^2)^{\frac{3}{2}} dt = \frac{1}{6} (5\sqrt{5} - 1) \\ \int_1^2 f(v(t)) \|v'(t)\| dt &= \int_1^2 2 dt = 2. \end{aligned}$$

Siis $\int_{\gamma} f ds = \frac{1}{6} (5\sqrt{5} - 1) + 2$.

18.2 Vektorikentän käyräintegraali

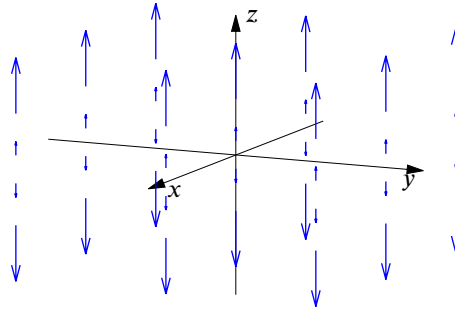
Määritelmä (Vektorikenttä) Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$. Vektorikenttä avaruudessa \mathbb{R}^n on funktio F , joka liittää jokaiseen pisteeseen $x \in D$ vektorin $F(x) \in \mathbb{R}^n$.

Vektorikenttä F (oletetaan, että F on jatkuva, eli $F \in C$) on konservatiivinen, jos se on jonkin reaaliarvoisen vektorifunktion $u \in C^1$ gradientti, eli on olemassa u siten, että $\nabla u = F$. Funktio u on vektorikentän F potentiaali.

Esimerkki (vektorikentästä) Piirrä avaruuteen \mathbb{R}^3 vektorikenttä, jonka antaa

$$F(x, y, z) = (0, 0, z) = z \underbrace{(0, 0, 1)}_{\bar{k}}.$$

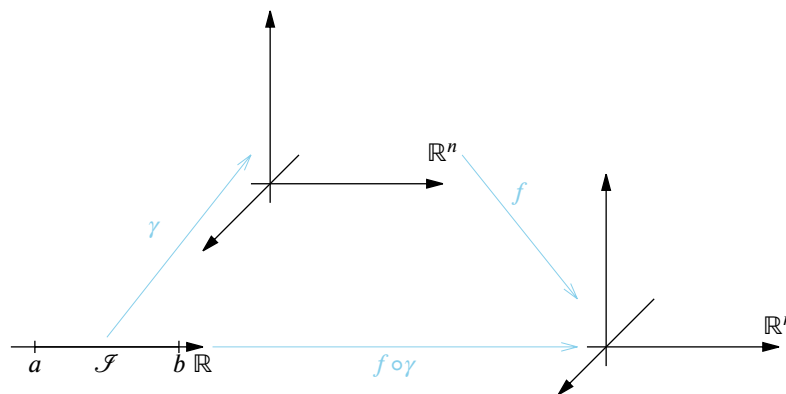
Kaikkien vektoreiden suunta on sama kuin z-akselin suunta ja vektorit osoittavat joko ”ylöspäin” xy -tasosta tai ”alaspäin” xy -tasosta. Niiden itseisarvo kasvaa, kun etäännyttään xy -tasosta.



Kuva 60: Kappaleen 18.2 esimerkki vektorikentästä $F(x, y, z) = (0, 0, z)$.

Määritelmä (Vektorikentän käyräintegraali) Olkoon $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : \underbrace{[a, b]}_{\mathcal{J}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -polku (paloittain C^1 riittää). Olkoon $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektorikenttä ja f jatkuva. Vektorikentän käyräintegraali polun γ suhteen (eli polkuintegraali)

$$\int_{\gamma} f \cdot d\bar{s} = \int_{\mathcal{J}} (f \circ \gamma)' = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$



Kuva 61: Kappale 18.2, vektoriarvoisen funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ käyräintegraali polun γ suhteen määritelmän yhdistetty kuvaus $f \circ \gamma$.

Huomautus

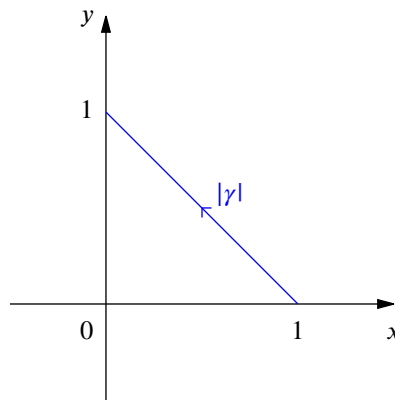
$$\begin{aligned} \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt &= \int_a^b (f_1(\gamma(t)), \dots, f_n(\gamma(t))) \cdot (\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t)) dt \\ &= \sum_{j=1}^n \int_a^b f_j(\gamma(t)) \gamma_j'(t) dt. \end{aligned}$$

Huomautus Toinen tapa merkitä:

$$\int_{\gamma} f \cdot d\bar{s} = \int_{\gamma} f \cdot dx = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma} f_j dx_j.$$

Esimerkki Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (xy, y^2)$, f jatkuva, $f \in C^1$.
Olkoon $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (1-t, t)$. Silloin $\gamma'(t) = (-1, 1)$. Nyt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f \cdot d\bar{s} &= \int_{[0,1]} (f \circ \gamma | \gamma') = \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^1 ((1-t)t, t^2) \cdot (-1, 1) dt \\ &= \int_0^1 ((1-t)t \cdot (-1) + t^2 \cdot 1) dt = \int_0^1 ((t-1)t + t^2) dt = \int_0^1 (2t^2 - t) dt = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$



Kuva 62: Kappaleen 18.2 esimerkin (yllä) polku γ , jota pitkin integroidaan vektorifunktiota f .

Huomautus Kun $n = 2$.

Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f = (f_1, f_2), f_j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, 2$. Olkoon $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, C^1$ -polku,
 $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2), \gamma_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, 2$. Nyt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f \cdot d\bar{s} &= \int_{[a,b]} (f \circ \gamma | \gamma') = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b (f_1(\gamma(t)), f_2(\gamma(t))) \cdot (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)) dt \\ &= \int_a^b f_1(\gamma(t)) \gamma_1'(t) dt + \int_a^b f_2(\gamma(t)) \gamma_2'(t) dt \\ &= \int_a^b f_1(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \gamma_1'(t) dt + \int_a^b f_2(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \gamma_2'(t) dt \\ &= \int_a^b f_1(x(t), y(t)) x'(t) dt + \int_a^b f_2(x(t), y(t)) y'(t) dt \\ &= \int_{\gamma} f_1(x, y) dx + \int_{\gamma} f_2(x, y) dy. \end{aligned}$$

Yllä merkitään $x(t) = \gamma_1(t)$ ja $y(t) = \gamma_2(t)$.

19 Analyysin peruslause ja sen moniulotteisia vastineita

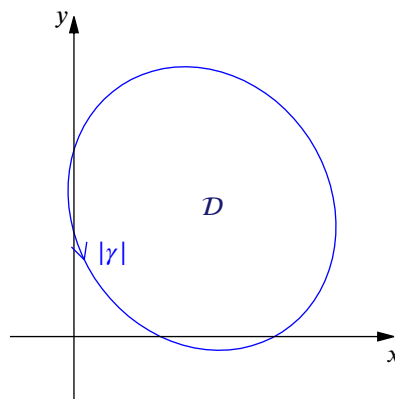
Lause (Analyysin peruslause) *Olkoon* $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $v \in C^1$. *Silloin*

$$\int_a^b v'(x) dx = v(b) - v(a).$$

Lause (Viivaintegraalin peruslause reaaliarvoiselle funktiolle)

Olkoon $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, C^1 -funktio ja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, C^1 -polku. *Silloin*

$$\int_{\gamma} \nabla f \cdot d\bar{s} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$



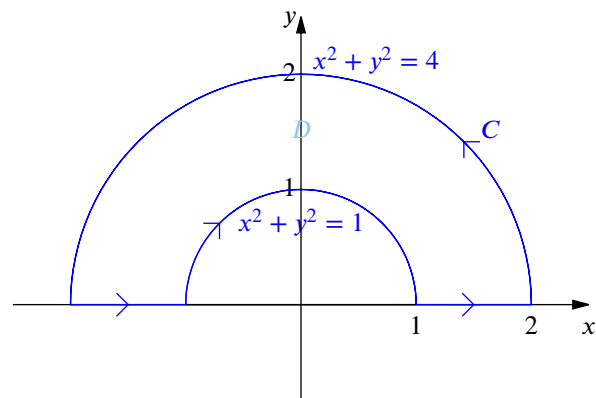
Kuva 63: γ on umpinainen, yksinkertainen, C^1 -polku (eli C^1 -Jordan polku), joka on positiivisesti suunnistettu ja sen rajaama joukko D .

Lause (Greenin kaava tasossa vektorifunktiolle)

Olkoon $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ umpinainen, yksinkertainen, C^1 -polku (eli C^1 -Jordan polku), joka on positiivisesti suunnistettu eli sen suunta on vastapäivään. *Olkoon* D rajoitettu joukko, jonka $|\gamma|$ rajaa. *Olkoon* $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ C^1 -funktio. *Silloin*

$$\int_D (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) dx_1 dx_2 = \int_{\partial D^+} (f_1 dx_1 + f_2 dx_2) = \int_{\gamma} f \cdot d\bar{s}.$$

Todistus. Palautuu analyysin peruslauseeseen. □



Kuva 64: Esimerkin 19.1 joukko $D = \{(r, \theta) \mid 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}$ ja sitä rajaava polku C .

Esimerkki 19.1 Etsi

$$\oint_C y^2 dx + 3xy dy.$$

Joukko $D = \{(r, \theta) \mid 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}$.

Ratkaisuehdotus. Nyt käyttäen Greenin kaavaa

$$\begin{aligned} \oint_C y^2 dx + 3xy dy &= \int_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(3xy) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2) \right) dx dy \\ &= \int_D y dx dy \\ &= \int_0^\pi \int_1^2 (r \sin \theta) r dr d\theta = \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

Kertausta kurssikokeeseen

Huomautus (1) Jos $D \subset \mathbb{R}^2$, niin

$$\int_D dx dy = \int_D 1 dx dy$$

on joukon D pinta-ala.

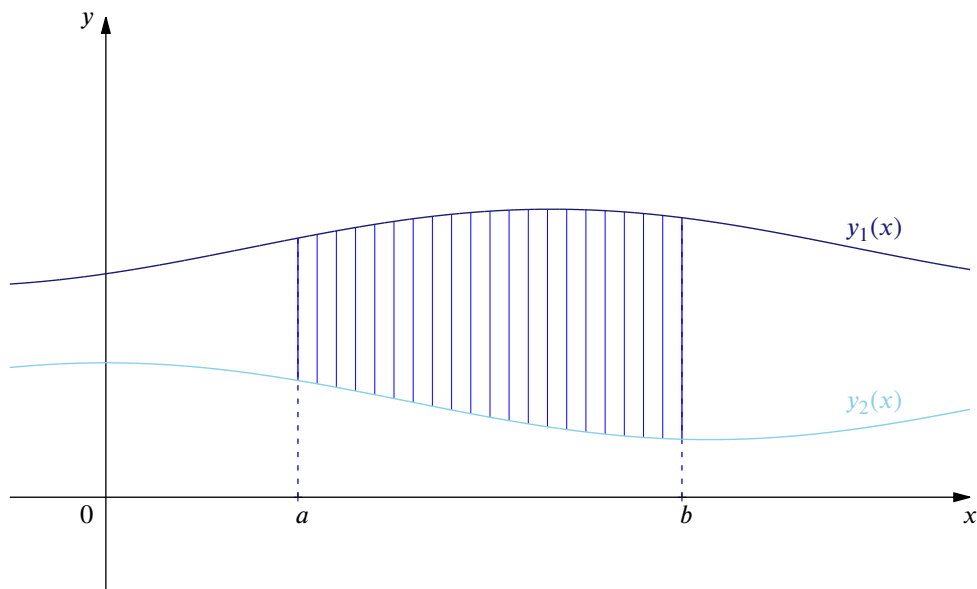
(2) Jos $D \subset \mathbb{R}^3$, niin

$$\int_D dx dy dz = \int_D 1 dx dy dz$$

on joukon D tilavuus.

(Oletamme, että joukon $D \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, reuna on n -nollajoukko.)

$n = 2$:

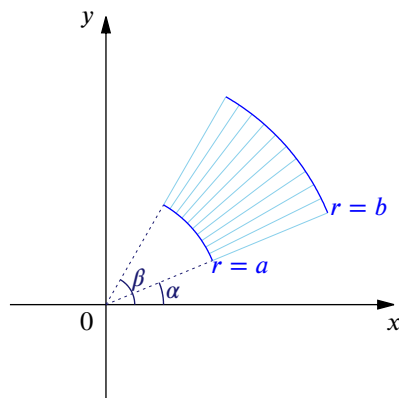


Kuva 65: Tyypin 1 joukko (katso huomautus 16.7) \mathcal{A} .

Joukon \mathcal{A} pinta-ala on

$$\int_{x=a}^{x=b} \int_{y=y_2(x)}^{y=y_1(x)} 1 dy dx = \int_{x=a}^{x=b} (y_1(x) - y_2(x)) dx.$$

Jos meillä on seuraavanlainen alue:

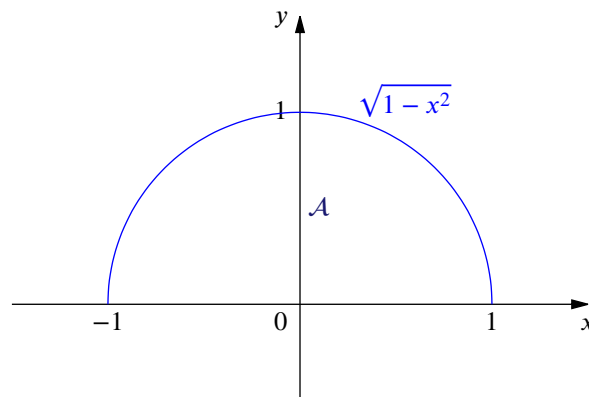


Kuva 66: Esimerkki helposti napakoordinaateissa kirjoitettavasta alueesta.

Tämän tyyppiset alueet voidaan helposti kirjoittaa napakoordinaateissa:

$$\{(r, \theta) \mid a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}.$$

Esimerkki Laske kuvan 67 joukon \mathcal{A} pinta-ala.



Kuva 67: Ratkaise joukon \mathcal{A} pinta-ala.

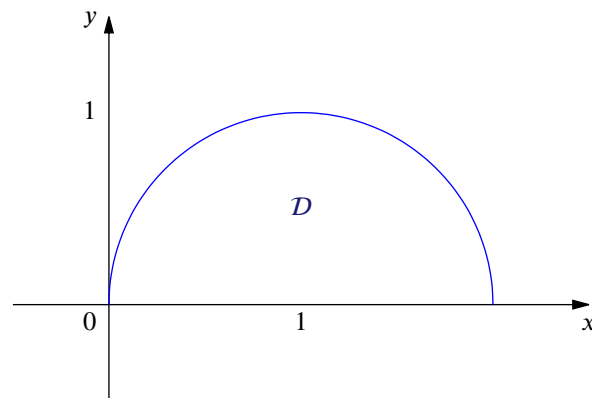
Pinta-ala:

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 1 \, dy \, dx$$

Napakoordinaateissa:

$$\int_0^{\pi} \int_0^1 \underbrace{r}_{\text{Jacobi}} \, dr \, d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Esimerkki Siirretään puoliympyrää kuvan 68 mukaisesti.



Kuva 68: Puolikas yksikköympyrä, jonka keskipiste on pisteessä $(1, 0)$.

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}.$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$(r \cos \theta - 1)^2 + (r \sin \theta)^2 = 1$$

$$r^2 \cos^2 \theta - 2r \cos \theta + 1 + r^2 \sin^2 \theta = 1$$

$$r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 2r \cos \theta$$

$$r = 2 \cos \theta$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ ja } 0 \leq r \leq 2 \cos \theta$$

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto y\sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\begin{aligned} \int_D f &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \cos \theta} r \sin \theta r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \cos \theta} r^3 \sin \theta \, dr \, d\theta = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

$n = 3$:

Huomautus Koska sylinterikoordinaatit ovat vain napakoordinaatit sovellettuna kahteen kolmesta muuttujasta, niin sylinterikoordinaatit eivät ole napakoordinaattien paras vastine avaruudessa \mathbb{R}^3 . Pallokoordinaatit yleistävät napakoordinaatit avaruuteen \mathbb{R}^3 .

Esimerkki $n = 3$: $B = B^3(0, \mathcal{R}) = B(0, \mathcal{R})$.

Pallokoordinaattimuunnos:

$$x = r \sin \varphi \cos \theta$$

$$\begin{aligned}y &= r \sin \varphi \sin \theta \\z &= r \cos \varphi \\J_g &= r^2 \sin \varphi\end{aligned}$$

Pallon \mathcal{B} tilavuus on

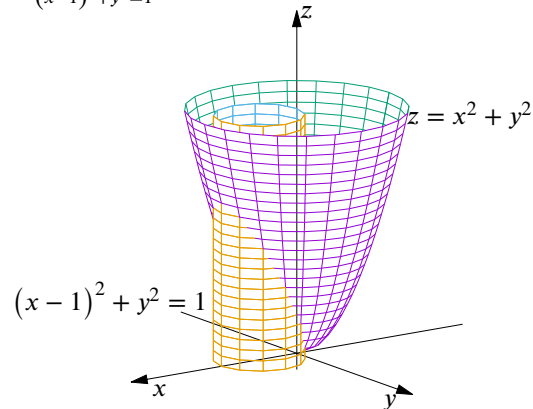
$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{B}} dx dy dz &= \int_0^{\mathcal{R}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{r^2 \sin \varphi}_{\text{Jacobi}} d\varphi d\theta dr \\&= \int_0^{\mathcal{R}} dr \int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{\int_0^{\pi} -\cos \varphi}_{=2} \\&= 2\pi \frac{1}{3} \mathcal{R}^3 2 = \frac{4\pi}{3} \mathcal{R}^3.\end{aligned}$$

Kotitehtävä: Käy läpi Lukuun 17:

$$\int_{B_M \setminus B_N} \|x\|^\lambda dx dy dz, \quad \lambda \neq -3.$$

Esimerkki Etsi kappaleen E tilavuus, joka kappale E on paraboloidin $z = x^2 + y^2$ alla ja xy -tason yläpuolella ja sylinterin $x^2 + y^2 = 2x$ sisällä.

$$\underbrace{x^2 + y^2 = 2x}_{(x-1)^2 + y^2 = 1}$$



Kuva 69: Kappale E on xy -tason ja pintojen $z = x^2 + y^2$ ja $(x-1)^2 + y^2 = 1$ rajaama tila.

$$r = 2 \cos \theta$$

Tilavuus on

$$\begin{aligned} \int_E 1 \, dx \, dy \, dz &= \int_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy \\ &\stackrel{(1)}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \cos \theta} r^2 r \, dr \, d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \cos \theta} \frac{1}{4} r^4 \, d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos \theta)^4 \, d\theta \\ &\stackrel{(2)}{=} 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta \\ &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right)^2 \, d\theta \\ &= \dots = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

(1) Napakoordinaatit käyttöön. (2) Kosini on parillinen.

20 Roottori ja divergenssi

Määrittelemme kaksi operaatiota, jotka kohdistuvat vektorikenttiin. Operaatiot ovat vektorianalyysin sovelluksissa tärkeitä, esimerkiksi nestevirtauksissa. Kumpikin muistuttaa osittaisderivoimista; toisen tuloksena on vektorikenttä ja toisen tuloksena skalaarikenttä:

Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f = (f_1, f_2, f_3)$, $f \in C^1$ (riittää, että f differentioituva). Merkitään

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Jos $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ differentioituva, niin $\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right)$.

Määritellään roottori

$$\nabla \times f = \text{rot } f = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \in \mathbb{R}^3.$$

Määritellään divergenssi

$$\nabla \cdot f = \text{div } f = \frac{\partial}{\partial x} f_1 + \frac{\partial}{\partial y} f_2 + \frac{\partial}{\partial z} f_3 \in \mathbb{R}.$$

21 Reaaliarvoisen funktion pintaintegraali

Olkoon $S = \varphi(\mathcal{U})$ avaruuden \mathbb{R}^3 kaksiulotteinen alkeispinta. Kuvajoukon $\varphi(\mathcal{F})$ pinta-alan hyvä arvio on tangenttitason \mathcal{T}_b suunnikkaan

$$b + D\varphi(a)\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{T}_b$$

pinta-ala, joka on

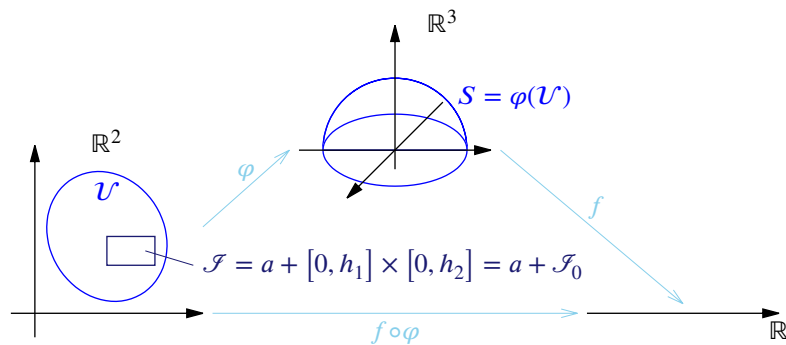
$$\left\| D\varphi(a)(h_1\bar{e}_1) \times D\varphi(a)(h_2\bar{e}_2) \right\| = \underbrace{\left\| \partial_1\varphi(a) \times \partial_2\varphi(a) \right\|}_{\text{suurennussuhde pist. } a \in \mathcal{U}} \underbrace{|\mathcal{F}_0|}_{h_1 h_2}$$

Joukon S pinta-ala on

$$A_2(s) = \int_{\mathcal{U}} \left\| \partial_1\varphi(u) \times \partial_2\varphi(u) \right\| du$$

ja funktion $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ pintaintegraali yli pinnan S on

$$\int_S f dS = \int_{\mathcal{U}} \left(f(\varphi(u)) \right) \left\| \partial_1\varphi(u) \times \partial_2\varphi(u) \right\| du.$$



Kuva 70: Reaaliarvoisen funktion pintaintegraalista. $h_1, h_2 > 0$ ovat hyvin pieniä lukuja. Funktio $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$, jossa $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$, antaa 2-ulotteisen alkeispinnan S avaruuteen \mathbb{R}^3 . Reaaliarvoisen funktion $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ pintaintegraali pinnan S ylitse saadaan laskettua kuten yllä.

22 Vektorikentän pintaintegraali

Olkoon $S = \varphi(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^3$ sileä alkeispinta. Jokaisessa pisteessä $x = \varphi(u) \in S$ on kaksi yksikkönormaalialia

$$n_1(x) := \frac{\partial_1 \varphi(u) \times \partial_2 \varphi(u)}{\|\partial_1 \varphi(u) \times \partial_2 \varphi(u)\|}$$

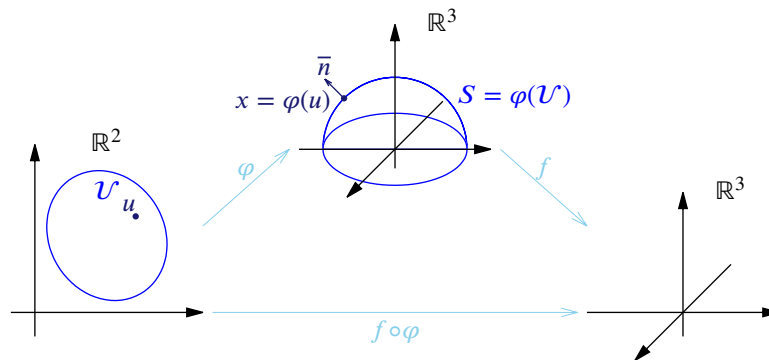
ja

$$n_2(x) := -n_1(x).$$

Pintaan S liitetään kaksi jatkuvaa yksikkönormaalialia $n_1 : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ ja $n_2 : S \rightarrow \mathbb{R}^3$. Valitsemalla toinen kiinnitetään pinnan suunnistus.

Määritelmä Jos f on jatkuva vektorikenttä pinnalla S ja yksikkönormaalivektori on n , niin funktion f pintaintegraali yli pinnan S on

$$\int_S f \cdot d\bar{S} = \int_S f \cdot d\bar{n} := \int_S f \cdot n \, dS = \int_{\mathcal{U}} f(\varphi(u)) \cdot (\partial_1 \varphi(u) \times \partial_2 \varphi(u)) \, du.$$



Kuva 71: Vektorikentän pintaintegraalista. Funktio $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$, jossa $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$, antaa 2-ulotteisen alkeispinnan S avaruuteen \mathbb{R}^3 . Jatkuvan vektorikentän $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ pintaintegraali pinnan S ylitse saadaan laskettua kuten yllä.

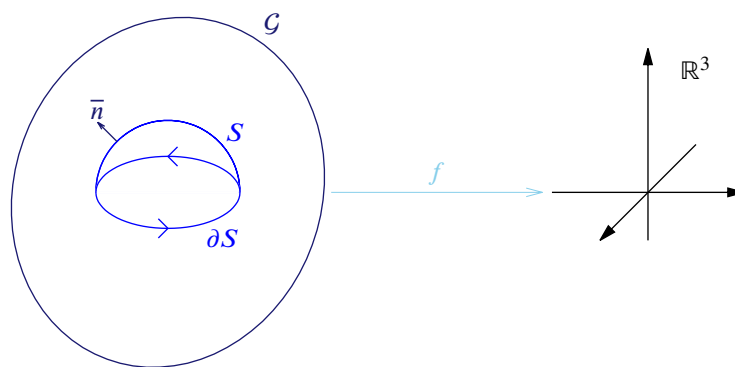
23 Stokesin lause

Greenin lause yleistyy Stokesin lauseena 2-ulotteiselle suunnistetulle pinnalle.

Olkoon $S \subset \mathbb{R}^3$ rajoitettu sielä alkeispinta, joka on suunnistettu, ja jonka reuna on yksinkertainen umpinainen positiivisesti suunnistettu C^1 -käyrä.

Olkoon $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorikenttä siten, että $f \in C^1(\mathcal{G})$, $\bar{S} \subset \mathcal{G}$. Silloin

$$\underbrace{\int_S (\nabla \times f) \cdot d\bar{S}}_{\text{vektorikentän pintaintegraali}} = \int_S (f \times f) \cdot \bar{n} dS = \underbrace{\int_{\partial S} f \cdot d\bar{s}}_{\text{vektorikentän käyräintegraali}}.$$



Kuva 72: Stokesin lauseesta. Vektorikentän $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^3$ pintaintegraali pinnan S , jolle $\bar{S} \subset \mathcal{G}$, ylitse saadaan laskettua kuten yllä.

Esimerkki 23.1 Olkoon $F(x, y, z) = (-y^2, x, z^2)$. Olkoon C tason $y + z = 2$ ja sylinterin $x^2 + y^2 = 1$ leikkaus. Olkoon käyrän C suunta positiivinen, kun katsotaan ylhäältäpäin. Määrää

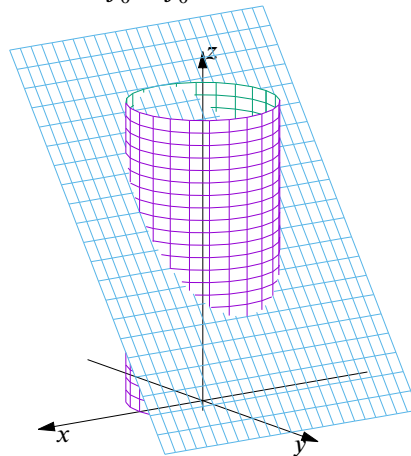
$$\int_C F \cdot d\vec{s}.$$

Ratkaisuehdotus. Käyrä C on ellipsialueen S reuna tasossa $y + z = 2$. Suunnistetaan S ylöspäin, jolloin reunalla ∂S on positiivinen kiertosuunta.

Pinnan S projektio tasoon xy on kiekko $x^2 + y^2 \leq 1$. Pinta S on graafipinta $z = g(x, y) = 2 - y$. Siis

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = (1 + 2y)e_3 = (0, 0, 1 + 2y).$$

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot d\vec{s} &= \int_S \nabla \times F \cdot d\vec{S} = \int_D (1 + 2y) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 2r \sin \theta) r dr d\theta = \pi. \end{aligned}$$



Kuva 73: Esimerkin 23.1 käyrä C , joka on tason $y + z = 2$ ja sylinterin $x^2 + y^2 = 1$ leikkaus.

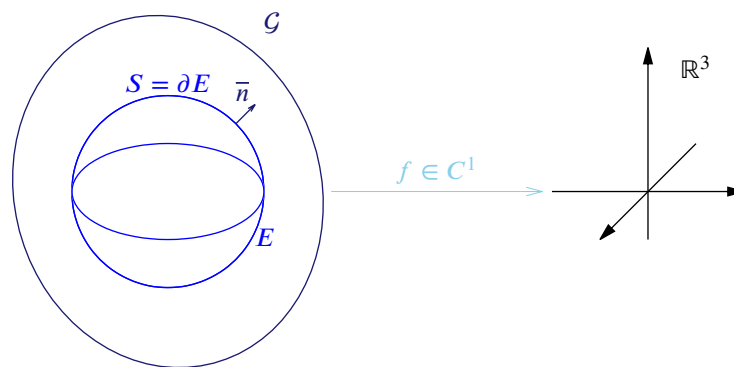
24 Gaussin lause (Divergenssilause)

Greenin lause yleistyy Gaussin lauseena, kun siirrytään tasoalueesta \mathbb{R}^2 -alueeseen.

Olkoon $E \subset \mathbb{R}^3$ yhdesti yhtenäinen alue avaruudessa \mathbb{R}^3 .

Olkoon S joukon E reunapinta, joka on positiivisesti (ulospäin) suunnistettu. Olkoon $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorikenttä, $f \in C^1$, ja $\overline{E} \subset \mathcal{G}$, \mathcal{G} avoin. Silloin

$$\underbrace{\int_E \nabla \cdot f \, dV}_{\text{tavallinen multi-integraali}} = \underbrace{\int_{\partial E^+} f \cdot d\vec{s}}_{\text{vektorikentän pintaintegraali}}$$



Kuva 74: Gaussin lauseesta. Vektorikentän $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^3$ pintaintegraali pinnan S , joka on avaruudessa \mathbb{R}^3 yhdesti yhtenäisen alueen $E \subset \mathbb{R}^3$ reunapinta ∂E , ylitse saadaan laskettua kuten yllä.

Esimerkki 24.1 Olkoon $F(x, y, z) = (xy, y^2 + e^{xz^2}, \sin xy)$. Määää

$$\underbrace{\int_S F \cdot d\vec{S}}_{\text{vektorikentän pintaintegraali}}$$

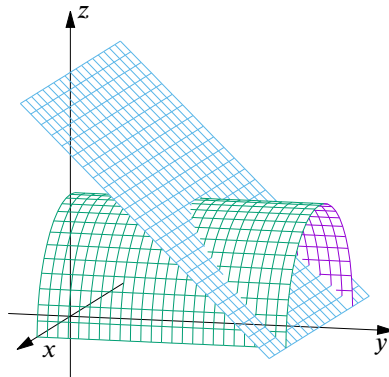
kun S on joukon E pinta, jossa joukon E avaruudessa \mathbb{R}^3 rajaavat parabolinen sylinteri $z = 1 - x^2$ ja tasot $z = 0$, $y = 0$, ja $y + z = 2$.

Ratkaisuehdotus.

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + e^{xz^2}) + \frac{\partial}{\partial z}(\sin xy) = y + 2y = 3y.$$

$$E = \left\{ (x, y, z) \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x^2, 0 \leq y \leq 2 - z \right\}.$$

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_E \underbrace{\operatorname{div} F}_{=3y} dx dy dz = 3 \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{2-z} y dy dz dx = \frac{184}{35}.$$



Kuva 75: Esimerkin 24.1 joukon E pinta S . Joukon E avaruudessa \mathbb{R}^3 rajaavat parabolinen sylinteri $z = 1 - x^2$ ja tasot $z = 0$, $y = 0$ ja $y + z = 2$.

Viitteet

- [1] Apostol Tom, *Mathematical Analysis*
- [2] Hurri Ritva, *Differentiaalilaskenta luennot*
- [3] Martio Olli, *Vektorianalyysi*, 2004: Limes Ry
- [4] Purmonen Veikko T., *Differentiaalilaskentaa Euklidisissa avaruuksissa*, luentomoniste, Jyväskylän yliopisto.
- [5] Purmonen Veikko T., *Integraalilaskenta 1*, luentomoniste, Jyväskylän yliopisto.
- [6] Purmonen Veikko T., *Integraalilaskenta 2*, luentomoniste, Jyväskylän yliopisto.
- [7] Spiegel Murray, *Advanced Calculus*, Schaum-sarja
- [8] Stein E. M. ja Shakarchi R., *Fourier Analysis: An Introduction*
- [9] Stewart James, *Calculus*, Early Transcendentals, Sixth Edition.
- [10] Väisälä Jussi, *Topologia 1*