

## Johdatus logiikkaan II

### Harjoitus 2

1. Olkoon  $M = (\mathbb{N}, R_0^M, P_0^M, c_0^M)$ , missä  $R_0^M$  on niiden  $(a, b) \in \mathbb{N}^2$  joukko joilla  $a$  jakaa  $b$ :n (eli löytyy luonnollinen luku  $c$  jolla  $ca = b$ ),  $P_0^M$  on alkulukujen joukko ja  $c_0^M = 5$ . Onko kaava  $P_0(x_0) \vee (\neg R_0(c_0, x_1) \wedge R_0(x_0, x_1))$  totta mallissa  $M$  tulkintafunktiolla  $s$  kun

- (a)  $s(x_0) = s(x_1) = 4$ ,
- (b)  $s(x_0) = 3$  ja  $s(x_1) = 10$ ,
- (c)  $s(x_0) = 4$  ja  $s(x_1) = 8$ .

2. Olkoon  $M$  kuten tehtävässä 1. Näytä, että kaava

$$\neg(\neg x_1 = c_0 \rightarrow \neg R_0(c_0, x_1)) \rightarrow \neg P_0(x_1)$$

on totta mallissa  $M$  kaikilla tulkintafunktioilla. Vihje: Tee vastaoletus ja tutki mitä tämä kertoo luvusta  $s(x_1)$ .

3. Olkoon  $M$  kuten tehtävässä 1 ja  $s$  mallin  $M$  tulkintafunktio, jolla  $s(x_i) = i+2$ . Mitä ovat funktiot

- (a)  $s(3/x_1)$ ,
- (b)  $s(5/x_0)(2/x_2)$ ,
- (c)  $s(5/x_0)(3/x_2)(4/x_0)$ ?

4. Olkoon  $M$  kuten tehtävässä 1 ja  $s$  mielivaltainen mallin  $M$  tulkintafunktio. Etsi  $a \in \mathbb{N}$ , jolla  $M \models_{s(a/x_0)} \neg P_0(x_0) \wedge (R_0(c_0, x_1) \leftrightarrow \neg R_0(x_1, x_0))$ . Vihje: huomaa, että luvun  $a$  valinta riippuu luvusta  $s(x_1)$ .

5. Olkoon  $L = \{R_0\}$ . Etsi  $L$ -kaava  $A$  jolla seuraavat ovat yhtäpitäviä kaikilla verkoilla  $M = (X, R_0^M)$ :

- (a) Jokaisella  $a \in X$ , löytyy mallin  $M$  tulkintafunktio  $s$ , jolla  $M \models_s A$  ja  $s(x_0) = a$ ,
- (b) jokaisella  $a \in X$  on vähintään kaksi naapuria, missä  $b$  on  $a$ :n naapuri jos  $(a, b) \in R_0^M$ .

6. Olkoon  $L = \{R_0\}$  ja  $M = (\mathbb{N}, R_0^M)$ , missä  $(a, b) \in R_0^M$  jos  $a = b + 1$  tai  $b = a + 1$ . Etsi  $L$ -kaava  $A$ , jolla kaikilla  $M$ :n tulkintafunktioilla  $s$  pätee:  $M \models_s A$  jos ja vain jos  $s(x_0) = 1$ .