Vektorianalyysi II (MAT21020), syksy 2018
Laskuharjoitus 2
Ryhmä 1: To 15.11., klo 14:15–16:00 (Exactum, C321)
Ryhmä 2: Ti 13.11., klo 14:15–16:00 (Exactum, B321)
Ryhmä 3: Ke 14.11., klo 14:15–16:00 (Exactum, B322)

---

1. Näytä, että tason avoimessa yksikköpallossa

$$B(0,1) := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

määritelty kuvaus

$$\mathcal{L} : B(0,1) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^3) : x \mapsto \mathcal{L}(x)$$

on jatkuva, kun jokaiselle $x \in B(0,1)$ ja kaikille $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ on

$$\mathcal{L}(x)u = (x_2^2 u_1 + 2x_1 x_2 u_2, -x_2 u_1 \sin x_1 + u_2 \cos x_1, u_1 \sin x_2 + x_1 u_2 \cos x_2).$$

2. Todista differentiaalilaskennan ketjusääntö (Lause 4.3).

3. Olkoot U ja V avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoimia ja yhtenäisiä joukkoja. Olkoon lisäksi

$$f : U \to V$$

diffeomorfismi joukolta U joukolle V. Osoita, että tällöin joko $J_f(x) > 0$ kaikilla $x \in U$ tai $J_f(x) < 0$ kaikilla $x \in U$.

4. Tarkastellaan kuvausta $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x) = x\|x\|\,.$$

(a) Hahmottele kuvan avulla kuvauksen f käyttäytymistä.
(b) Osoita, että kuvaus f on jatkuvasti differentioituva injektio. Mikä on kuvauksen f derivaatta origossa?
(c) Näytä, että jokaiselle $x \in \mathbb{R}^2$ pätee

$$J_f(x) = 2\|x\|^2\,.$$

(d) Onko kuvaus f diffeomorfismi?

5. Tarkastellaan pisteille $(x, z, y) \in \mathbb{R}^3$ määriteltyä yhtälöparia

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - z = 4. \end{cases}$$

Osoita
(a) suoralla ratkaisulla (eli ratkaisemalla yhtälöpari tavalliseen tapaan) ja
(b) implisiittifunktiolausetta käyttäen,
että yllä olevalla yhtälöparilla on pisteen $x_0 = (\sqrt{2}, -1, -1)$ sopivassa ympäristössä muotoa $(x, g(x))$ oleva C^1-ratkaisu ja

$$Dg(\sqrt{2}) = (-\sqrt{2}, 4\sqrt{2}).$$

6. Osoita, että yhtälöllä

$$xy^2 + y^3 z^4 + z^5 x^6 = 1 \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

on pisteen $x_0 = (0, 1, -1)$ avoimessa ympäristössä muotoa $(x, g(x, z), z)$ oleva C^1-ratkaisu. Osoita lisäksi, että

$$\nabla g(0, -1) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right).$$