Topologi Ib
Kandidatprogrammet i matematiska vetenskaper
Hösten 2018
Övning 3

Tillägspoäng: varje vecka ger 2–3 lösta uppgifter +1/2 p, och 4–6 lösta uppgifter ger +1 p. Påminnelseuppgifterna räknas inte in.

Påminnelseuppgift 1. Låt V vara ett vektorrum. Normerna $\|\cdot\| : V \to [0,\infty[$ och $|||\cdot||| : V \to [0,\infty[$ sägs vara *bilipschitz-ekvivalenta* om det finns ett tal $M \geq 1$ så att

$$\|v\|/M \leq |||v||| \leq M\|v\|$$

för varje vektor $v \in V$.

Försäkra dig om att normerna $\|\cdot\|$ och $|||\cdot|||$ är bilipschitz-ekvivalenta, om och endast om de metriker de definierar är bilipschitz-ekvivalenta.

Påminnelseuppgift 2. Försäkra dig om att metrikerna d och d' i X är bilipschitz-ekvivalenta, om och endast om den identiska avbildningen $\mathrm{id} : (X,d) \to (X,d')$ är en bijektiv bilipschitz-avbildning.

Påminnelseuppgift 3. Låt X vara en mängd och låt d och d' vara sådana metriker att diametern på rummet (X,d) är oändlig och diametern på rummet (X,d') är ändlig. Förklara varför det inte kan finnas en bilipschitz-avbildning $f : X \to X$ mellan de metriska rummen (X,d) och (X,d').

Egentliga uppgifter:

Uppgift 1. Låt $(V,\|\cdot\|_V)$ och $(W,\|\cdot\|_W)$ vara normrum. I linjära algebran visas att produktrummet $V \times W$ av vektorrummen V och W är ett vektorrum då addition och skalärprodukt definieras enligt $(v,w)+(v',w') = (v+v', w+w')$ och $a(v,w) = (av, aw)$, för $v, v' \in V$, $w, w' \in W$ och $a \in \mathbb{R}$.

Definiera funktioner $\|\cdot\|_0 : V \times W \to [0,\infty[$, $\|\cdot\|_1 : V \times W \to [0,\infty[$ och $\|\cdot\|_2 : V \times W \to [0,\infty[$ enligt $\|(v,w)\|_0 = \max\{\|v\|_V, \|w\|_W\}$, $\|(v,w)\|_1 = \|v\|_V + \|w\|_W$ och $\|(v,w)\|_2 = \sqrt{\|v\|_V^2 + \|w\|_W^2}$, där $v \in V$ och $w \in W$.

Visa att $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_1$ och $\|\cdot\|_2$ är normer i vektorrummet $V \times W$.

Uppgift 2. Visa att normerna $\|\cdot\|$ och $|||\cdot|||$ i vektorrummet V är bilipschitz-ekvivalenta (se Påminnelseuppgift 1) om och endast om den identiska avbildningen $\mathrm{id} : V \to V$ är en bilipschitz-avbildning mellan normrummen $(V,\|\cdot\|)$ och $(V,|||\cdot|||)$.

Uppgift 3. Antag att $g : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty[$ är definierad via $g(x,y) = \sqrt{|x-y|}$.

(a) Visa att g är en metrik i $\mathbb{R}^2$.
(b) Är g ekvivalent med den vanliga metriken d i $\mathbb{R}^2$?
(c) Är g bilipschitz-ekvivalent med d?

Uppgift 4. Låt $f : X \to Y$ vara en homeomorfism från det metriska rummet (X, d) till det metriska rummet (Y, d') och definiera $d_f : X \times X \to [0, \infty[$ genom $d_f(x, y) = d'(f(x), f(y))$ för varje $x, y \in X$.

(a) Visa att d_f är en metrik i X.
(b) Visa att d_f är ekvivalent med metriken d.

Uppgift 5. Antag att $X =]0, 1[$ och $e(x, y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$ för $x, y \in X$. Visa att

(a) e är en metrik i X.
(b) e är ekvivalent med den vanliga metriken i X.
(c) Det finns ingen metrik e' i $\mathbb{R}$ som skulle kunna inducera e och vara ekvivalent med den vanliga metriken i $\mathbb{R}$.

Uppgift 6. Antag att $Z = X \times Y$ är produkten av två metriska rum och att $E \subset X$ och $F \subset Y$. Visa att

(a) Om E och F är öppna så är också $E \times F$ det.
(b) Motsvarande gäller för slutna mängder.