Topologi Ib
Kandidatprogrammet i matematiska vetenskaper
Hösten 2018
Övning 4

Tilläggspoäng: varje vecka ger 2–3 lösta uppgifter +1/2 p, och 4–6 lösta uppgifter ger +1 p. Påminnelseuppgifterna räknas inte in.

Påminnelseuppgift 1. Bevisa med hjälp av triangelolikheten (utan att hänvisa till produktrum) att om (x_n) och (y_n) är följder i X så att $x_n \to a$ och $y_n \to b$, så gäller $d(x_n, y_n) \to d(a, b)$.

Påminnelseuppgift 2. Vilka villkor skall gälla för att en följd (x_n) skall konvergera i X om X är ett diskret metriskt rum?

Påminnelseuppgift 3. Förvissa dig om att bokens exempel stämmer: Följden $(2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, 5, \dots)$ har anhopningsvärdet 0. Ge ett exempel på en delföljd som konvergerar till 0.

Egentliga uppgifter:

Uppgift 1. Visa med hjälp av definitionen av gränsvärde och triangelolikheten att för varje normrum $(V, \|\cdot\|)$ gäller:

(a) Om (x_k) och (y_k) är följder så att $x_k \to x$ och $y_k \to y$, så gäller $x_k + y_k \to x + y$.
(b) Om (a_k) är en följd i $\mathbb{R}$, (x_k) är en följd i V och $a_k \to a$, $x_k \to x$, så gäller $a_k x_k \to ax$.

Notera: resultatet finns i Väisäläs bok, men meningen med uppgiften är att ge ett annat bevis.

Uppgift 2. Undersök om följande följder (x_n) i $\mathbb{R}^n$ konvergerar. Bestäm gränsvärdena i de konvergenta fallen.

(a) $x_n = (n^{-1}, e^{-n}, (-1)^n)$,
(b) $x_n = (n^{-1}, e^{-n}, n)$,
(c) $x_n = (\sin(1 + n^{-1}), \arctan n, n^{-10})$.

Uppgift 3. Antag att $a \in X$ och att (x_n) är en följd i rummet X sådan att varje delföljd har en delföljd som konvergerar mot a. Visa att $x_n \to a$.

Uppgift 4. Antag att $x_n = (\cos(n\pi/2), \sin(n\pi/2)) \in \mathbb{R}^2$. Bestäm anhopningsvärdena till följden (x_n). Sök för varje anhopningsvärde en delföljd som konvergerar mot det.

Uppgift 5. Granska följden (f_n) i normrummet $C[0,1]$ med normen $|\cdot|_\infty$ där $|g|_\infty = \sup_{t\in[0,1]}|g(t)|)$ och $f_n(t) = e^{t/n}$ för $t \in [0,1]$ och $n \in \mathbb{N}$. Visa att $f_n \to 1$, där $1(t) = 1$ för varje $t \in [0,1]$. (Tips: medelvärdessatsen)

Uppgift 6. Antag att (x_n) är en följd i rummet X. Visa att mängden av anhopningsvärden till följden är sluten.