Vektorianalyysi II (MAT21020), syksy 2018
Laskuharjoitus 3
Ryhmä 1: To 22.11., klo 14:15–16:00 (Exactum, C321)
Ryhmä 2: Ti 20.11., klo 14:15–16:00 (Exactum, B321)
Ryhmä 3: Ke 21.11., klo 14:15–16:00 (Exactum, B322)

---

1. Olkoot $r_1 > 0$ ja $r_2 > 0$. Anna homeomorfismi, joka kuvaa avoimen yksikköneliön

$$Q(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < 1 \text{ ja } |x_2| < 1\}$$

avoimeksi suorakulmioksi

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < r_1 \text{ ja } |x_2| < r_2\}.$$

Onko antamasi homeomorfismi diffeomorfismi?

2. Osoita, että *kartiopinta*

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\}$$

on kaksiulotteinen alkeispinta avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Hahmottele kuvan avulla joukkoa S.

3. Olkoot

$$b = (2, 1, -1), \quad v_1 = (1, 0, 0) \quad \text{ja} \quad v_2 = (0, 1, 1).$$

Tällöin joukko

$$\mathcal{T} = b + \langle v_1, v_2 \rangle = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = b + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \text{ joillekin } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

määrittelee pisteen b kautta kulkevan, vektoreiden v_1 ja v_2 virittämän avaruuden $\mathbb{R}^3$ hypertason.

(a) Anna tasolle $\mathcal{T}$ esitys tasa-arvojoukko-muodossa.

(b) Anna myös esitys pisteen b kautta kulkevalle tason $\mathcal{T}$ normaalisuoralle $\mathcal{N}_b$.

4. Tarkastellaan joukkoa

$$S = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 4 - 4x_1^2 - 2x_2^2,\ x_1^2 + x_2^2 < 1\right\}.$$

(a) Osoita, että S on sileä pinta (Vinkki: esitä joukko S sopivassa avoimessa joukossa määritellyn funktion graafipintana).

(b) Määritä pinnan S joukot $\mathcal{T}_{y_0}$ ja $\mathcal{N}_{y_0}$ pisteessä $y_0 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

(c) Mitkä ovat joukkojen $\mathcal{T}_{y_0}$ ja $\mathcal{N}_{y_0}$ dimensiot?

5. Osoita, että pallokoordinaattikuvaus $g :]0, \infty[\times]0, 2\pi[\times] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}^3$,

$$g(r, \theta, \phi) = (r \cos\theta \cos\phi, r \sin\theta \cos\phi, r \sin\phi)$$

on injektio. Havainnollista kuvauksen g käyttäytymistä hahmottelemalla joukot

$$A = g\big(\{(r, \theta, \phi) : r = 1,\ \theta \in]\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2}[,\ \phi \in] - \tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\,\}\big)$$

ja

$$B = g\big(\{(r, \theta, \phi) : r = 1,\ \theta \in]\pi, 2\pi[,\ \phi \in]0, \tfrac{\pi}{2}[\,\}\big).$$

6. Osoita, että pallopinnan puolikas

$$\mathbb{S}^2_- := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1,\ x_2 < 0\}$$

on sileä 2-ulotteinen alkeispinta (Vinkki: käytä apunasi tehtävän 5 kuvausta).