HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus logiikkaan II, syksy 2018
Harjoitus 2 – Ratkaisuehdotukset

1. Olkoon $M = (\mathbb{N}, R_0^M, P_0^M, c_0^M)$, missä R_0^M on niiden $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ joukko, joilla a jakaa b:n (eli löytyy luonnollinen luku c, jolla $ca = b$), P_0^M on alkulukujen joukko ja $c_0^M = 5$. Onko kaava $P_0(x_0) \vee (\neg R_0(c_0, x_1) \wedge R_0(x_0, x_1))$ totta mallissa M tulkintafunktiolla s, kun

   (a) $s(x_0) = s(x_1) = 4$,

   (b) $s(x_0) = 3$ ja $s(x_1) = 10$,

   (c) $s(x_0) = 4$ ja $s(x_1) = 8$?

   Ratkaisu: Termin arvon määritelmän mukaan $x_0^M\langle s\rangle = s(x_0)$, $x_1^M\langle s\rangle = s(x_1)$ sekä $c_0^M\langle s\rangle = c_0^M = 5$. Merkitään $\varphi = P_0(x_0) \vee (\neg R_0(c_0, x_1) \wedge R_0(x_0, x_1))$. Nyt Tarskin totuusmääritelmän mukaan

$$
\begin{aligned}
M \models_s \varphi \text{ joss } & M \models_s P_0(x_0) \vee (\neg R_0(c_0, x_1) \wedge R_0(x_0, x_1)) \\
\text{joss } & M \models_s P_0(x_0) \text{ tai } M \models_s \neg R_0(c_0, x_1) \wedge R_0(x_0, x_1) \\
\text{joss } & M \models_s P_0(x_0) \text{ tai } [M \models_s \neg R_0(c_0, x_1) \text{ ja } M \models_s R_0(x_0, x_1)] \\
\text{joss } & M \models_s P_0(x_0) \text{ tai } [M \not\models_s R_0(c_0, x_1) \text{ ja } M \models_s R_0(x_0, x_1)] \\
\text{joss } & x_0^M\langle s\rangle \in P_0^M \text{ tai } \left[\left(c_0^M\langle s\rangle, x_1^M\langle s\rangle\right) \notin R_0^M \text{ ja } \left(x_0^M\langle s\rangle, x_1^M\langle s\rangle\right) \in R_0^M\right] \\
\text{joss } & s(x_0) \in P_0^M \text{ tai } \left[\left(c_0^M, s(x_1)\right) \notin R_0^M \text{ ja } (s(x_0), s(x_1)) \in R_0^M\right] \\
\text{joss } & s(x_0) \in P_0^M \text{ tai } \left[(5, s(x_1)) \notin R_0^M \text{ ja } (s(x_0), s(x_1)) \in R_0^M\right].
\end{aligned}
$$

   (a) Selvästikään $s(x_1) = 4$ ei ole jaollinen 5:llä, joten $(5, s(x_1)) \notin R_0^M$. Lisäksi koska $s(x_0) = s(x_1)$ ja jokainen luonnollinen luku jakaa itsensä, pätee $(s(x_0), s(x_1)) \in R_0^M$. Siten ylemmän tarkastelun nojalla $M \models_s \varphi$.

   (b) Koska $s(x_0) = 3$ on alkuluku, niin $s(x_0) \in P_0^M$ ja siten ylemmän tarkastelun nojalla $M \models_s \varphi$.

   (c) Samalla tavalla kuin kohdassa (a), luku $s(x_1) = 8$ ei ole jaollinen viidellä mutta sen sijaan se on jaollinen luvulla $s(x_0) = 4$, joten $M \models_s \varphi$.

   Siis jokaisessa kohdassa kaava φ on totta mallissa M tulkintafunktiolla s.

2. Olkoon M kuten tehtävässä 1. Näytä, että kaava

$$\neg(\neg x_1 = c_0 \to \neg R_0(c_0, x_1)) \to \neg P_0(x_1)$$

on totta mallissa M kaikilla tulkintafunktioilla. Vihje: Tee vastaoletus ja tutki mitä tämä kertoo luvusta $s(x_1)$.

Ratkaisu: Tehdään vastaoletus, että on olemassa jokin tulkintafunktio s, jolle

$$M \not\models_s \neg(\neg x_1 = c_0 \to \neg R_0(c_0, x_1)) \to \neg P_0(x_1).$$

Tällöin Tarskin totuusmääritelmän nojalla $M \models_s \neg(\neg x_1 = c_0 \to \neg R_0(c_0, x_1))$ sekä $M \not\models_s \neg P_0(x_1)$.

Koska $M \not\models_s \neg P_0(x_1)$, niin $M \models_s P_0(x_1)$ eli $x_1^M\langle s\rangle = s(x_1) \in P_0^M$. Koska P_0^M on alkulukujen joukko, voimme päätellä, että $s(x_1)$ on alkuluku.

Toisaalta, koska $M \models_s \neg(\neg x_1 = c_0 \to \neg R_0(c_0, x_1))$, Tarskin totuusmääritelmästä edelleen seuraa, että $M \not\models_s \neg x_1 = c_0 \to \neg R_0(c_0, x_1)$. Edelleen $M \models_s \neg x_1 = c_0$ mutta $M \not\models_s \neg R_0(c_0, x_1)$. Siten $M \models_s R_0(c_0, x_1)$, joten $\left(c_0^M\langle s\rangle, x_1^M\langle s\rangle\right) = (5, s(x_1)) \in R_0^M$. Koska relaatiosymbolin R_0 tulkinta oli jaollisuus, pätee $5 \mid s(x_1)$. Koska aiemmin päättelimme, että $s(x_1)$ on alkuluku, tästä seuraa, että $s(x_1) = 5$, sillä 5 on ainoa alkuluku, jonka luku 5 jakaa. Kuitenkin koska $M \models_s \neg x_1 = c_0$, pätee $M \not\models_s x_1 = c_0$ eli $s(x_1) = x_1^M\langle s\rangle \neq c_0^M\langle s\rangle = c_0^M = 5$, mikä on ristiriita, sillä $s(x_1) = 5$.

Koska päädyimme ristiriitaan, tällaista tulkintafunktiota s ei voi olla olemassa. Siten

$$M \models_s \neg(\neg x_1 = c_0 \to \neg R_0(c_0, x_1)) \to \neg P_0(x_1)$$

kaikilla tulkintafunktioilla s, mikä pitikin todistaa.

3. Olkoon M kuten tehtävässä 1 ja s mallin M tulkintafunktio, jolla $s(x_i) = i+2$. Mitä ovat funktiot

   (a) $s(3/x_1)$,

   (b) $s(5/x_0)(2/x_2)$,

   (c) $s(5/x_0)(3/x_2)(4/x_0)$?

Ratkaisu: Merkinnällä $s(a/x_i)$ tarkoitetaan tulkintafunktiota, jolle

$$s(a/x_i)(x) = \begin{cases} a, & \text{jos } x = x_i, \\ s(x) & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Toisin sanoen $s(a/x_i)$ kuvaa kaikki muut muuttujasymbolit kuin s paitsi symbolin x_i, jonka se kuvaa alkiolle $a \in M$.

(a) $s(3/x_1)$ on tulkintafunktio, jolle

$$s(3/x_1)(x_i) = \begin{cases} 3, & \text{jos } i = 1, \\ i+2 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

(b) Ensinnäkin $s(5/x_0)$ on tulkintafunktio, jolle

$$s(5/x_0)(x_i) = \begin{cases} 5, & \text{jos } i = 0, \\ i+2 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Muokkaamalla tätä funktiota uudestaan saadaan $s(5/x_0)(2/x_2)$, jolle

$$\begin{aligned} s(5/x_0)(2/x_2)(x_i) &= \begin{cases} 2, & \text{jos } i = 2, \\ s(5/x_0)(x_i) & \text{muulloin} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2, & \text{jos } i = 2, \\ 5, & \text{jos } i = 0, \\ i+2 & \text{muulloin.} \end{cases} \end{aligned}$$

Kyseessä on siis vain tulkintafunktio, jonka kaksi arvoa olemme manuaalisesti muuttaneet.

(c) Selvitimme funktion $s(5/x_0)$ edellisessä kohdassa, ja samalla tyylillä kuin edellisessä kohdassa myös saadaan tulkintafunktioksi $s(5/x_0)(3/x_2)$ se, jolle pätee

$$\begin{aligned} s(5/x_0)(3/x_2)(x_i) &= \begin{cases} 3, & \text{jos } i = 2, \\ s(5/x_0)(x_i) & \text{muulloin} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 3, & \text{jos } i = 2, \\ 5, & \text{jos } i = 0, \\ i+2 & \text{muulloin.} \end{cases} \end{aligned}$$

Nyt muokkaamalla tätä funktiota vielä kerran saamme tulkintafunktion $s(5/x_0)(3/x_2)(4/x_0)$, jolle pätee

$$\begin{aligned} s(5/x_0)(3/x_2)(4/x_0)(x_i) &= \begin{cases} 4, & \text{jos } i = 0, \\ s(5/x_0)(3/x_2)(x_i) & \text{muulloin} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 4, & \text{jos } i = 0, \\ 3, & \text{jos } i = 2, \\ i+2 & \text{muulloin.} \end{cases} \end{aligned}$$

Huomaa, että funktio $s(5/x_0)(3/x_2)(4/x_0)$ ei saa enää arvoa 5 syötteellä x_0, sillä korvasimme kyseisen arvon arvolla 4. Funktio $s(5/x_0)(3/x_2)(4/x_0)$ onkin siis sama kuin funktio $s(3/x_2)(4/x_0)$; vain viimeisellä lisätyllä x_0:n arvolla on väliä. Kannattaa kuitenkin olla varovainen muokattujen tulkintafunktioiden kanssa. Ne ovat oleellinen työkalu, kun käsitellään kvanttoreita sisältävien kaavojen totuutta.

4. Olkoon M kuten tehtävässä 1 ja s mielivaltainen mallin M tulkintafunktio. Etsi $a \in \mathbb{N}$, jolla $M \models_{s(a/x_0)} \neg P_0(x_0) \wedge (R_0(c_0, x_1) \leftrightarrow \neg R_0(x_1, x_0))$. Vihje: huomaa, että luvun a valinta riippuu luvusta $s(x_1)$.

   Ratkaisu: Tarskin totuusmääritelmän mukaan

$$M \models_{s(a/x_0)} \neg P_0(x_0) \wedge (R_0(c_0, x_1) \leftrightarrow \neg R_0(x_1, x_0)),$$

   jos ja vain jos $M \models_{s(a/x_0)} \neg P_0(x_0)$ ja $M \models_{s(a/x_0)} (R_0(c_0, x_1) \leftrightarrow \neg R_0(x_1, x_0))$. Edelleen $M \models_{s(a/x_0)} \neg P_0(x_0)$, jos ja vain jos $M \not\models_{s(a/x_0)} P_0(x_0)$ eli

$$x_0^M\langle s(a/x_0)\rangle = s(a/x_0)(x_0) = a \notin P_0^M.$$

   Siis luku a ei saa olla alkuluku.

   Tutkimalla toista ehtoa Tarskin totuusmääritelmän avulla huomataan, että väite ”$M \models_{s(a/x_0)} (R_0(c_0, x_1) \leftrightarrow \neg R_0(x_1, x_0))$” on yhtäpitävä väitteen ”$M \models_{s(a/x_0)} R_0(c_0, x_1)$ jos ja vain jos $M \models_{s(a/x_0)} \neg R_0(x_1, x_0)$” kanssa. Siis mallin M ja tulkintafunktion $s(a/x_0)$ tulee toteuttaa kumpikin kaavoista $R_0(c_0, x_1)$ ja $\neg R_0(x_1, x_0)$ tai ei kumpaakaan. Edelleen totuusmääritelmästä saadaan

$$\begin{aligned}
M \models_{s(a/x_0)} & R_0(c_0, x_1) \\
& \text{joss } \left(c_0^M\langle s(a/x_0)\rangle, x_1^M\langle s(a/x_0)\rangle\right) \in R_0^M \\
& \text{joss } \left(c_0^M, s(a/x_0)(x_1)\right) \in R_0^M \\
& \text{joss } (5, s(x_1)) \in R_0^M \\
& \text{joss } 5 \mid s(x_1),
\end{aligned}$$

sekä

$$\begin{aligned}
M \models_{s(a/x_0)} & \neg R_0(x_1, x_0) \\
& \text{joss } M \not\models_{s(a/x_0)} R_0(x_1, x_0) \\
& \text{joss } \left(x_1^M\langle s(a/x_0)\rangle, x_0^M\langle s(a/x_0)\rangle\right) \notin R_0^M \\
& \text{joss } (s(a/x_0)(x_1), s(a/x_0)(x_0)) \notin R_0^M \\
& \text{joss } (s(x_1), a) \notin R_0^M \\
& \text{joss } s(x_1) \nmid a.
\end{aligned}$$

Siis jos $s(x_1)$ on viidellä jaollinen, täytyy a valita niin, että se ei ole $s(x_1)$:llä jaollinen, ja jos $s(x_1)$ ei ole jaollinen viidellä, sen täytyy jakaa a. Kummassakin tapauksessa täytyy muistaa, että a ei saanut olla alkuluku.

Tehdään lopuksi eksplisiittinen valinta.

(i) Mikäli $s(x_1)$ on jaollinen viidellä, olkoon $a = 1$. Tällöin $s(x_1) \nmid a$, sillä 1 on ainoa luku, joka jakaa a:n, ja $s(x_1)$ ei voi olla yksi, sillä se on viiden monikerta.

(ii) Mikäli $s(x_1)$ ei ole jaollinen viidellä, olkoon $a = 4s(x_1)$. Tällöin $s(x_1) \mid a$ eikä a varmasti ole alkuluku.

5. Olkoon $L = \{R_0\}$. Etsi L-kaava A jolla seuraavat ovat yhtäpitäviä kaikilla verkoilla $M = (X, R_0^M)$:

   (a) Jokaisella $a \in X$, löytyy mallin M tulkintafunktio s, jolla $M \models_s A$ ja $s(x_0) = a$,

   (b) jokaisella $a \in X$ on vähintäin kaksi naapuria, missä b on a:n naapuri jos $(a, b) \in R_0^M$.

Ratkaisu: Valitaan $A = \neg x_1 = x_2 \wedge (R_0(x_0, x_1) \wedge R_0(x_0, x_2))$. Intuitiivisesti A sanoo, että muuttujien x_1 ja x_2 tulkinnat ovat kumpikin relaatiossa muuttujan x_0 tulkinnan kanssa mutta ne eivät ole sama alkio. Tämä tarkoittaisi siis sitä, että x_1:n ja x_2:n tulkinnat olisivat x_0:n kaksi eri naapuria. Osoitetaan vielä tarkasti, että (a) ja (b) ovat yhtäpitävät tällä kaavan A valinnalla.

Osoitetaan ensin, että (a):sta seuraa (b). Oletetaan, että (a) pätee. Olkoon $a \in X$. Jotta saataisiin todistettua (b), halutaan osoittaa, että a:lla on ainakin kaksi eri naapuria b ja c. Kohdan (a) nojalla löytyy tulkintafunktio s, jolle $s(x_0) = a$ ja $M \models_s A$. Tarskin totuusmääritelmän nojalla nyt $M \models_s \neg x_1 = x_2$, $M \models_s R_0(x_0, x_1)$ ja $M \models_s R_0(x_0, x_2)$. Siis $s(x_1) \neq s(x_2)$, $(s(x_0), s(x_1)) \in R_0^M$

ja $(s(x_0), s(x_2)) \in R_0^M$. Merkitään $b = s(x_1)$ ja $c = s(x_2)$. Koska $s(x_0) = a$, nyt nähdään, että $(a, b) \in R_0^M$ sekä $(a, c) \in R_0^M$, ja lisäksi $b \neq c$. Siispä a:lla on vähintään kaksi naapuria. Siis (b) pätee.

Osoitetaan sitten, että (b):stä seuraa (a). Oletetaan, että (b) pätee. Olkoon $a \in X$. (a):n osoittamiseksi halutaan löytää tulkintafunktio s, jolle $s(x_0) = a$ sekä $M \models_s A$. Kohdan (b) nojalla a:lla on vähintään kaksi naapuria eli on olemassa $b, c \in X$, joille $b \neq c$ sekä $(a, b), (a, c) \in R_0^M$. Määritellään nyt tulkintafunktio s niin, että

$$s(x_i) = \begin{cases} a, & \text{jos } i = 0, \\ b, & \text{jos } i = 1, \\ c, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Nyt siis $s(x_0) = a$, $s(x_1) = b$ sekä $s(x_2) = c$. Siten $s(x_1) = b \neq c = s(x_2)$, ja $(s(x_0), s(x_1)) = (a, b) \in R_0^M$ sekä $(s(x_0), s(x_2)) = (a, c) \in R_0^M$. Tarskin totuusmääritelmän nojalla nyt $M \not\models_s x_1 = x_2$, $M \models_s R_0(x_0, x_1)$ sekä $M \models_s R_0(x_0, x_2)$. Siis $M \models_s \neg x_1 = x_2$ ja $M \models_s R_0(x_0, x_1) \wedge R_0(x_0, x_2)$. Edelleen tästä seuraa, että $M \models_s A$. Löysimme siis tulkintafunktion s, jolle $s(x_0) = a$ ja $M \models_s A$. Siis (a) pätee.

6. Olkoon $L = \{R_0\}$ ja $M = (\mathbb{N}, R_0^M)$, missä $(a, b) \in R_0^M$ jos $a = b + 1$ tai $b = a + 1$. Etsi L-kaava A, jolla kaikilla M:n tulkintafunktioilla s pätee: $M \models_s A$ jos ja vain jos $s(x_0) = 1$.

   Ratkaisu: Relaatio R_0^M on määritelty siten, että kaksi lukua ovat relaatiossa, jos ja vain jos ne ovat peräkkäiset luvut. Tehtävässä halutaan löytää kaava A, joka eräällä tapaa määrittelee luvun 1: nimittäin kaava A saa toteutua vain ja ainoastaan sillä tulkinnalla, että x_0 tulkitaan luvuksi 1. Yritetään siis keksiä jokin tapa puhua luvusta 1.

   Luvusta 1 voi olla hieman hankala puhua annetuilla työkaluilla (relaatio R_0^M), mutta luvusta 0 puhuminen on helpompaa. Nolla nimittäin on ainoa luku, jonka kummallakin puolella ei ole toista lukua. Jokaisen positiivisen luonnollisen luvun kummallakin puolella asuu joku, esimerkiksi viisi on neljän ja kuuden välissä. Siten $(5, 4), (5, 6) \in R_0^M$. Nolla sen sijaan on relaatiossa vain luvun 1 kanssa: selvästi $1 = 0 + 1$, joten $(0, 1) \in R_0^M$, mutta millekään luvulle $a \neq 1$ ei päde $a = 0 + 1$. Millekään luvulle a (edes ykköselle) ei myöskään päde $0 = a + 1$. Siten mikään muu kuin 1 ei voi olla relaatiossa nollan kanssa.

   Se, että nolla on relaatiossa vain yhden muun luvun kanssa, voidaan sanoa kaavalla

   $$\forall x_2 \forall x_3 ((R_0(x_1, x_2) \wedge R_0(x_1, x_3)) \to x_2 = x_3).$$

Kaava sanoo oleellisesti sen, että kahta eri lukua, jotka olisivat x_1:n tulkinnan kanssa relaatiossa, ei ole olemassa.[1]

Kaava toteutuu mallissa M tulkintafunktiolla s, jos ja vain jos $s(x_1) = 0$. Merkitään kaavaa lyhyesti kirjaimella φ. Käyttämällä Tarskin totuusmääritelmää osoitetaan väite täsmällisesti. Olkoon s mikä tahansa tulkintafunktio. Nyt

$$
\begin{aligned}
M \models_s \varphi \text{ joss } & M \models_s \forall x_2 \forall x_3((R_0(x_1,x_2) \land R_0(x_1,x_3)) \to x_2 = x_3) \\
\text{joss } & M \models_{s(a/x_2)} \forall x_3((R_0(x_1,x_2) \land R_0(x_1,x_3)) \to x_2 = x_3) \\
& \hfill \text{kaikilla } a \in \mathbb{N} \\
\text{joss } & M \models_{s(a/x_2)(b/x_3)} ((R_0(x_1,x_2) \land R_0(x_1,x_3)) \to x_2 = x_3) \\
& \hfill \text{kaikilla } a \in \mathbb{N} \text{ kaikilla } b \in \mathbb{N} \\
\text{joss } & M \not\models_{s(a/x_2)(b/x_3)} (R_0(x_1,x_2) \land R_0(x_1,x_3) \text{ tai} \\
& \quad M \models_{s(a/x_2)(b/x_3)} x_2 = x_3 \text{ kaikilla } a \in \mathbb{N} \text{ kaikilla } b \in \mathbb{N} \\
\text{joss } & M \not\models_{s(a/x_2)(b/x_3)} R_0(x_1,x_2) \text{ tai } M \not\models_{s(a/x_2)(b/x_3)} R_0(x_1,x_3) \text{ tai} \\
& \quad M \models_{s(a/x_2)(b/x_3)} x_2 = x_3 \text{ kaikilla } a \in \mathbb{N} \text{ kaikilla } b \in \mathbb{N} \\
\text{joss } & \Big(x_1^M\langle s(a/x_2)(b/x_3)\rangle, x_2^M\langle s(a/x_2)(b/x_3)\rangle\Big) \notin R_0^M \text{ tai} \\
& \quad \Big(x_1^M\langle s(a/x_2)(b/x_3)\rangle, x_3^M\langle s(a/x_2)(b/x_3)\rangle\Big) \notin R_0^M \text{ tai} \\
& \quad x_2^M\langle s(a/x_2)(b/x_3)\rangle = x_3^M\langle s(a/x_2)(b/x_3)\rangle \text{ kaikilla } a, b \in \mathbb{N} \\
\text{joss } & (s(a/x_2)(b/x_3)(x_1), s(a/x_2)(b/x_3)(x_2)) \notin R_0^M \text{ tai} \\
& \quad (s(a/x_2)(b/x_3)(x_1), s(a/x_2)(b/x_3)(x_3)) \notin R_0^M \text{ tai} \\
& \quad s(a/x_2)(b/x_3)(x_2) = s(a/x_2)(b/x_3)(x_3) \text{ kaikilla } a, b \in \mathbb{N} \\
\text{joss } & (s(x_1), a) \notin R_0^M \text{ tai } (s(x_1), b) \notin R_0^M \text{ tai } a = b \text{ kaikilla } a, b \in \mathbb{N} \\
\text{joss } & \text{kaikilla } a \neq b, \text{ pätee joko } (s(x_1), a) \notin R_0^M \text{ tai } (s(x_1), b) \notin R_0^M \\
\text{joss } & \text{on olemassa enintään yksi } a \in \mathbb{N}, \text{ jolle } (s(x_1), a) \in R_0^M \\
\text{joss } & s(x_1) = 0.
\end{aligned}
$$

Nyt, kun osaamme sanoa, että $s(x_1)$ on nolla, voimme puhua ykkösestä seuraavasti: luku 1 on se yksikäsitteinen luku, joka on relaatiossa luvun 0 kanssa. Koska emme halua antaa kaavalle A yhtään tulkinnanvaraa, meidän täytyy *kvantifioida* muuttuja x_1 kaavasta φ. Tähän tarkoitukseen kelpaa kumpi tahansa kvanttoreista, sillä 0 on joka tapauksessa ainoa muuttujan x_1 käypä tulkinta. Määritellään siis kaava A olemaan $\exists x_1(\varphi \land R_0(x_1, x_0))$.[2]

[1] Jos tiedät, mikä on injektiivinen funktio, φ käyttää samaa ideaa kuin injektiivisyyden määritelmä.

[2] Jos käytettäisiin universaalikvanttoria, kaava olisi $\forall x_1(\varphi \to R_0(x_1, x_0))$.

Intuitiivisesti kaava sanoo, että on olemassa sellainen x_1:n tulkinta, että sille pätee se, mitä kaava φ nyt sanookaan (eli että se on nolla) ja lisäksi x_0:n tulkinta on sen kanssa relaatiossa.

Osoitetaan vielä tarkasti, että kaava A sanoo, mitä haluamme. Olkoon jälleen s mikä tahansa tulkintafunktio. Tarskin totuusmääritelmän nojalla

$$\begin{aligned}
M \models_s A \text{ joss } & M \models_s \exists x_1(\varphi \wedge R_0(x_1, x_0)) \\
\text{joss } & M \models_{s(a/x_1)} \varphi \wedge R_0(x_1, x_0) \text{ jollakin } a \in \mathbb{N} \\
\text{joss } & M \models_{s(a/x_1)} \varphi \text{ ja } M \models_{s(a/x_1)} R_0(x_1, x_0) \text{ jollakin } a \in \mathbb{N} \\
\text{joss } & s(a/x_1)(x_1) = 0 \text{ ja } (s(a/x_1)(x_1), s(a/x_1)(x_0)) \in R_0^M \\
& \hfill \text{jollakin } a \in \mathbb{N} \\
\text{joss } & a = 0 \text{ ja } (a, s(x_0)) \in R_0^M \text{ jollakin } a \in \mathbb{N} \\
\text{joss } & (0, s(x_0)) \in R_0^M \\
\text{joss } & s(x_0) = 1.
\end{aligned}$$

Siispä olemme osoittaneet, että kaikilla tulkintafunktioilla s pätee, että $M \models_s A$, jos ja vain jos $s(x_1) = 1$.