Topologi Ib
Kandidatprogrammet i matematiska vetenskaper
Hösten 2018
Övning 5

Tilläggspoäng: varje vecka ger 2–3 lösta uppgifter +1/2 p, och 4–6 lösta uppgifter ger +1 p. Påminnelseuppgifterna räknas inte in.

Påminnelseuppgift 1. Visa att följande är ekvivalenta, då $f : X \to Y$ är en avbildning och $a \in X$:

(a) f är kontinuerlig i a.
(b) $f(a) = \lim_{x \to a, x \in X} f(x)$.
(c) Gränsvärdet $\lim_{x \to a, x \in X} f(x)$ existerar.

Påminnelseuppgift 2. Antag att (x_n) är en reell följd. Visa att

(a) Om (x_n) är växande och begränsad ovanifrån så gäller $x_n \to \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.
(b) Om (x_n) är avtagande och begränsad nedanifrån så gäller $x_n \to \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Påminnelseuppgift 3. Antag att X är en ändlig mängd med en metrik d. Kontrollera att (X, d) är ett fullständigt rum.

Påminnelseuppgift 4. Visa att en Cauchy-följd alltid är begränsad.

Egentliga uppgifter:

Uppgift 1. Antag att $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är funktionen $f_n(x) = \max\{0, x - n\}$, då $n \in \mathbb{N}$. Undersök huruvida funktionsföljden (f_n) konvergerar (a) punktvis, (b) likformigt i $\mathbb{R}$. Undersök samma sak ifall $\mathbb{R}$ har $\{0, 1\}$-metrik (diskreta metriken).

Uppgift 2. Visa att om $b = \lim_{x \to a, x \in A} f(x)$ så gäller $b \in \overline{fA}$.

Uppgift 3. Definiera funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ på följande sätt: $f(x, y) = 1$, då $x^4 < y < x^2$ och $f(x, y) = 0$ i övriga punkter (x, y). Bevisa att:

(a) $\lim_{z \to \bar{0}, z \in L} f(z) = 0$ för varje rät linje L som går genom origo,
(b) $\lim_{z \to \bar{0}} f(z)$ inte existerar.

Uppgift 4. Antag att (x_n) är en följd i X. Beteckna $A_n = \{x_j : j \geq n\}$ då $n \in \mathbb{N}$. Visa att (x_n) är Cauchy om och endast om $d(A_n) \to 0$ då $n \to \infty$.

Uppgift 5. Antag att (X, d) är ett metriskt rum och $A \subseteq X$ är en fullständig delmängd (dvs (A, d_A) är ett fullständigt metriskt rum). Visa att A är sluten i X.

Uppgift 6. Antag att D är en mängd och $E = \text{begr}(D, \mathbb{R})$, rummet av alla begränsade funktioner $f : D \to \mathbb{R}$ försett med sup-norm. Visa att E är ett fullständigt rum, ett s.k. Banach-rum. (Använd dig av att $\mathbb{R}$ är ett fullständigt rum.)