Vektorianalyysi II (MAT21020), syksy 2018
Laskuharjoitus 4
Ryhmä 1: To 29.11., klo 14:15–16:00 (Exactum, C321)
Ryhmä 2: Ti 27.11., klo 14:15–16:00 (Exactum, B321)
Ryhmä 3: Ke 28.11., klo 14:15–16:00 (Exactum, B322)

---

1. Olkoon $U \subset \mathbb{R}^2$ avoin joukko ja

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) : U \to \mathbb{R}^3$$

kaksiulotteisen C^1-alkeispinnan

$$S = \varphi(U)$$

globaali parametriesitys. Osoita, että pinnalla S on tangenttitaso pisteessä $y_0 = \varphi(x_0)$ jos ja vain jos φ voidaan valita siten, että jokin determinanteista

$$J_{\varphi,i}(x_0) := \begin{vmatrix} \partial_1\varphi_j(x_0) & \partial_2\varphi_j(x_0) \\ \partial_1\varphi_k(x_0) & \partial_2\varphi_k(x_0) \end{vmatrix}$$

indekseille $(i,j,k) \in \{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\}$ eroaa nollasta.

2. Osoita, että edellisen tehtävän pinnalla S on pisteessä $y_0 = \varphi(x_0)$ muotoa

$$\nu = \partial_1\varphi(x_0) \times \partial_2\varphi(x_0) := \big(J_{\varphi,1}(x_0), J_{\varphi,2}(x_0), J_{\varphi,3}(x_0)\big)$$

oleva normaalivektori $\nu := \nu(y_0)$ (silloin, kun se on olemassa).

3. Tarkastellaan funktion $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x_1 e^{x_2} + x_2 e^{x_3} + x_3 e^{x_4}$$

määräämää tasa-arvojoukkoa $S = f^{-1}(1)$.

(a) Osoita, että S määrittelee sileän pinnan. Mikä on pinnan S dimensio?

(b) Määritä pinnan S joukot $\mathcal{T}_{y_0}$ ja $\mathcal{N}_{y_0}$ pisteessä $y_0 = (-1,1,1,0)$.

4. Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja

$$f : U \to \mathbb{R}$$

differentioituva funktio. Olkoon $a \in U$ funktion f lokaali ääriarvopiste. Osoita, että tällöin $\nabla f(a) = 0$. (Vinkki: osoita ensin, että $\partial_e f(a) = 0$ jokaiselle suunnalle $e \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$).

5. Määritä funktioiden $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x_1^2 + x_1^2 x_2 + \tfrac{1}{2}x_2^2 + x_3^2 + 1$$

ja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = x_1^2 + x_1 x_2 + e^{x_2 x_3}$$

kriittiset pisteet ja niiden laatu

(a) koko avaruudessa $\mathbb{R}^3$.

(b) joukossa $U = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$.

6. Määritä avaruuden $\mathbb{R}^3$ pintojen

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2z^2 = 1\}$$

ja

$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y + z^2 + 1 = 0\}$$

leikkausjoukon suurin ja pienin etäisyys origosta.