HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus logiikkaan I, syksy 2018
Harjoitus 3 – Ratkaisuehdotukset

1. Palataan Partakylään. Olkoon P partatietokanta ja $\mathcal{M}$ tästä saatu malli kuten Harjoitusten 1 Tehtävän 2 malliratkaisussa. Etsi kaava A niin että $\mathcal{M} \models A$ jos ja vain jos

   (a) Partakylässä on parturi, joka ajaa kaikkien niiden ja vain niiden parran, jotka eivät aja omaa partaansa,

   (b) Partakylässä on parturi joka ajaa kaikkien niiden ja vain niiden miesten parran, jotka eivät aja omaa partaansa.

   Ratkaisu:

   (a) $A = \exists x_0(R(x_0) \wedge \forall x_1(S(x_0, x_1) \leftrightarrow \neg S(x_1, x_1)))$,

   (b) $A = \exists x_0(R(x_0) \wedge \forall x_1(\neg Q(x_1) \rightarrow (S(x_0, x_1) \leftrightarrow \neg S(x_1, x_1))))$.

2. Etsi Partakylä (eli malli $\mathcal{M}$), jossa edellisen tehtävän

   (a) kohdan (a),

   (b) kohdan (b)

   lause on totta. Mitä voit sanoa parturista? Kuka ajaa parturin parran?

   Ratkaisu:

   (a) Avataan ensin sitä, mitä lauseen toteutuminen tarkoittaa. Tarskin totuusmääritelmän nojalla, joitakin väliväiheita ohittaen,

   $\mathcal{M} \models_s \exists x_0(R(x_0) \wedge \forall x_1(S(x_0, x_1) \leftrightarrow \neg S(x_1, x_1)))$
   joss on olemassa $p \in M$ jolla
   $\quad \mathcal{M} \models_{s(p/x_0)} R(x_0) \wedge \forall x_1(S(x_0, x_1) \leftrightarrow \neg S(x_1, x_1))$
   joss on olemassa parturi $p \in M$ jolla
   $\quad \mathcal{M} \models_{s(p/x_0)} \forall x_1(S(x_0, x_1) \leftrightarrow \neg S(x_1, x_1))$
   joss on olemassa parturi $p \in M$ jolla kaikilla $m \in M$ pätee
   $\quad \mathcal{M} \models_{s(p/x_0)(m/x_1)} S(x_0, x_1) \leftrightarrow \neg S(x_1, x_1)$
   joss on olemassa parturi $p \in M$ jolla kaikilla $m \in M$ pätee,
   että p ajaa m:n parran jos ja vain jos m ei aja m:n partaa.

Erityisesti siis valitsemalla $m = p$, nähdään että mikäli lause toteutuu, niin p ajaa oman partansa jos ja vain jos p ei aja omaa partaansa. Tämä on ristiriita, ja kyseinen lause ei ole toteutuva. (Kyseessä on eräs versio Russellin paradoksista.)

(b) Avataan ensin sitä, mitä lauseen toteutuminen tarkoittaa. Tarskin totuusmääritelmän nojalla, joitakin väliväiheita ohittaen,

$\mathcal{M} \models_s \exists x_0(R(x_0) \wedge \forall x_1(\neg Q(x_1) \to (S(x_0, x_1) \leftrightarrow \neg S(x_1, x_1))))$
joss on olemassa $p \in M$ jolla
$\quad \mathcal{M} \models_{s(p/x_0)} R(x_0) \wedge \forall x_1(\neg Q(x_1) \to (S(x_0, x_1) \leftrightarrow \neg S(x_1, x_1))),$
joss on olemassa parturi $p \in M$ jolla
$\quad \mathcal{M} \models_{s(p/x_0)} \forall x_1(\neg Q(x_1) \to (S(x_0, x_1) \leftrightarrow \neg S(x_1, x_1))),$
joss on olemassa parturi $p \in M$ jolla kaikilla $m \in M$ pätee
$\quad \mathcal{M} \models_{s(p/x_0)(m/x_1)} \neg Q(x_1) \to (S(x_0, x_1) \leftrightarrow \neg S(x_1, x_1)),$
joss on olemassa parturi $p \in M$ jolla kaikilla miehillä $m \in M$ pätee
$\quad \mathcal{M} \models_{s(p/x_0)(m/x_1)} S(x_0, x_1) \leftrightarrow \neg S(x_1, x_1),$
joss on olemassa parturi $p \in M$ jolla kaikilla miehillä $m \in M$ pätee,
että p ajaa m:n parran jos ja vain jos m ei aja m:n partaa.

Nähdään, että kaava sanoo, mitä halutaankin. Määritellään eräs Partakylän malli seuraavasti:

$$\mathcal{M} = (M, Q^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}}, S^{\mathcal{M}}) = (\{p, m\}, \{p\}, \{p\}, \{(p, m)\}).$$

Partakylässä on siis kaksi asukasta p ja m, joista p on naisparturi ja m on mies, ja p ajaa m:n parran (ja m ei aja partaansa). Lause A siten toteutuu tässä mallissa. Parturi p ei ole mies, jotta hänen ei tarvitse sekä ajaa että olla ajamatta partaansa. Mallissa kukaan ei aja p:n partaa, mutta parturin antaminen p:lle ei tuottaisi ristiriitoja.

Toinen tapa saada malli, jossa lause A on totta, on määritellä naisten predikaatti $Q^{\mathcal{M}}$ koko perusjoukoksi (ja parturipredikaatti $R^{\mathcal{M}}$ epätyhjäksi). Nimittäin tällöin ei ole yhtään miestä $m \in M$, jolla kaava $S(x_0, x_1) \leftrightarrow \neg S(x_1, x_1)$ voisi olla toteutumatta, ja lause A pätee automaattisesti (kunhan on olemassa ainakin yksi parturi).

3. Näytä, että $\exists x_0 A \to \neg\forall x_0 \neg A$ on validi.

Ratkaisu: Olkoot $\mathcal{M}$ ja s mielivaltaiset malli ja tulkintafunktio: halutaan näyttää, että $\mathcal{M}$ ja s toteuttavat tehtävän kaavan. Tarskin totuusmääritelmän nojalla

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M} \models_s \exists x_0 A \to \neg\forall x_0 \neg A,\\
&\text{joss } \mathcal{M} \not\models_s \exists x_0 A \text{ tai } \mathcal{M} \models_s \neg\forall x_0\neg A,\\
&\text{joss } \mathcal{M} \not\models_s \exists x_0 A \text{ tai } \mathcal{M} \not\models_s \forall x_0\neg A.
\end{aligned}$$

Halutaan siis näyttää, että pätee joko $\mathcal{M} \not\models_s \exists x_0 A$ tai $\mathcal{M} \not\models_s \forall x_0 \neg A$. Tarkastellaan kahta tapausta jälkimmäisen ehdon totuuden suhteen:

- Jos $\mathcal{M} \not\models_s \forall x_0 \neg A$, ollaan valmiit.
- Jos $\mathcal{M} \models_s \forall x_0 \neg A$, halutaan näyttää, että tällöin $\mathcal{M} \not\models_s \exists x_0 A$. Koska $\mathcal{M} \models_s \forall x_0 \neg A$ tarkoittaa, että kaikilla $a \in M$ pätee $\mathcal{M} \models_{s(a/x_0)} \neg A$ eli $\mathcal{M} \not\models_{s(a/x_0)} A$, niin ei ole olemassa sellaista $a_0 \in M$, että $\mathcal{M} \models_{s(a_0/x_0)} A$. Siis $\mathcal{M} \not\models \exists x_0 A$, kuten haluttiin.

4. Näytä, että $\forall x_0 \neg(A \to B) \to \forall x_0 A$ on validi.

Ratkaisu: Olkoot $\mathcal{M}$ ja s mielivaltaiset malli ja tulkintafunktio: halutaan taas näyttää, että ne toteuttavat tehtävän kaavan. Tarskin totuusmääritelmän nojalla

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M} \models_s \forall x_0 \neg(A \to B) \to \forall x_0 A,\\
&\text{joss } \mathcal{M} \not\models_s \forall x_0 \neg(A \to B) \text{ tai } \mathcal{M} \models_s \forall x_0 A.
\end{aligned}$$

Tutkitaan taas kahta tapausta:

- Jos $\mathcal{M} \not\models_s \forall x_0 \neg(A \to B)$, ollaan valmiit.
- Jos $\mathcal{M} \models_s \forall x_0 \neg(A \to B)$, niin halutaan näyttää, että tällöin $\mathcal{M} \models_s \forall x_0 A$. Oletus tarkoittaa, että kaikilla $a \in M$ pätee $\mathcal{M} \models_{s(a/x_0)} \neg(A \to B)$, eli $\mathcal{M} \not\models_{s(a/x_0)} A \to B$, eli $\mathcal{M} \models_{s(a/x_0)} A$ ja $\mathcal{M} \not\models_{s(a/x_0)} B$. Siis erityisesti kaikilla $a \in M$ pätee $\mathcal{M} \models_{s(a/x_0)} A$, eli $\mathcal{M} \models_s \forall x_0 A$, kuten haluttiin.

5. Näytä, että $\forall x_0(P_0(x_0) \lor P_1(x_0)) \to (\forall x_0 P_0(x_0) \lor \forall x_0 P_1(x_0))$ ei ole validi.

Ratkaisu: Kaavassa esiintyy predikaattisymbolit P_0 ja P_1, eli vastaesimerkkiä varten halutaan aakkoston $\{P_0, P_1\}$ malli. Valitaan malliksi

$$\mathcal{M} = (\mathbb{N}, 2\mathbb{N}, 2\mathbb{N}+1)$$

eli universumi on $\mathbb{N}$, predikaatti $P_0^{\mathcal{M}}$ on parillisten ja $P_1^{\mathcal{M}}$ parittomien lukujen joukko.

Koska jokainen luku $n \in \mathbb{N}$ on joko parillinen tai pariton, niin $\mathcal{M} \models_{s(n/x_0)} P_0(x_0) \vee P_1(x_0)$, eli $\mathcal{M} \models \forall x_0(P_0(x_0) \vee P_1(x_0))$. Toisaalta Tarskin totuusmääritelmän nojalla

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M} \models_s (\forall x_0 P_0(x_0) \vee \forall x_0 P_1(x_0)) \\
&\text{joss } \mathcal{M} \models_s \forall x_0 P_0(x_0) \text{ tai } \mathcal{M} \models_s \forall x_0 P_1(x_0), \\
&\text{joss kaikilla } n \in \mathbb{N} \text{ pätee } \mathcal{M} \models_{s(n/x_0)} P_0(x_0) \\
&\qquad \text{tai kaikilla } n \in \mathbb{N} \text{ pätee } \mathcal{M} \models_{s(n/x_0)} P_1(x_0), \\
&\text{joss kaikilla } n \in \mathbb{N} \text{ pätee } x_0^M\langle s(n/x_0)\rangle = n \in P_0 \\
&\qquad \text{tai kaikilla } n \in \mathbb{N} \text{ pätee } x_0^M\langle s(n/x_0)\rangle = n \in P_1, \\
&\text{joss kaikilla } n \in \mathbb{N} \text{ pätee, että } n \text{ on parillinen} \\
&\qquad \text{tai kaikilla } n \in \mathbb{N} \text{ pätee, että } n \text{ on pariton.}
\end{aligned}$$

Koska kumpikaan ylläolevista väitteistä ei päde (esim. $1 \in \mathbb{N}$ ei ole parillinen ja $0 \in \mathbb{N}$ ei ole pariton), niin $\mathcal{M} \not\models_s (\forall x_0 P_0(x_0) \vee \forall x_0 P_1(x_0))$.

Siis Tarskin totuusmääritelmän nojalla

$$\mathcal{M} \not\models_s \forall x_0(P_0(x_0) \vee P_1(x_0)) \to (\forall x_0 P_0(x_0) \vee \forall x_0 P_1(x_0)),$$

mikä osoittaa, että kyseinen kaava ei ole validi.

6. Näytä, että $\forall x_0(A \to B) \ \Rightarrow\ \exists x_0 A \to \exists x_0 B$.

Ratkaisu: Oletetaan, että malli $\mathcal{M}$ ja tulkintafunktio s ovat sellaiset, että $\mathcal{M} \models_s \forall x_0(A \to B)$, eli kaikilla $a \in M$ pätee $\mathcal{M} \models_{s(a/x_0)} A \to B$ eli $\mathcal{M} \not\models_{s(a/x_0)} A$ tai $\mathcal{M} \models_{s(a/x_0)} B$. Halutaan osoittaa, että $\mathcal{M} \models_s \exists x_0 A \to \exists x_0 B$. Tarskin totuusmääritelmän nojalla

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M} \models_s \exists x_0 A \to \exists x_0 B, \\
&\text{joss } \mathcal{M} \not\models_s \exists x_0 A \text{ tai } \mathcal{M} \models_s \exists x_0 B, \\
&\text{joss millään } a \in M \text{ ei päde } \mathcal{M} \models_{s(a/x_0)} A \\
&\qquad \text{tai jollakin } a \in M \text{ pätee } \mathcal{M} \models_{s(a/x_0)} B, \\
&\text{joss kaikilla } a \in M \text{ pätee } \mathcal{M} \not\models_{s(a/x_0)} A \\
&\qquad \text{tai jollakin } a \in M \text{ pätee } \mathcal{M} \models_{s(a/x_0)} B.
\end{aligned}$$

Tarkastellaan taas kahta tapausta.

- Jos jollakin $a \in M$ pätee $\mathcal{M} \models_{s(a/x_0)} B$, ollaan valmiit.
- Oletetaan sitten, että millään $a \in M$ ei päde $\mathcal{M} \models_{s(a/x_0)} B$. Koska kaikilla $a \in M$ pätee $\mathcal{M} \not\models_{s(a/x_0)} A$ tai $\mathcal{M} \models_{s(a/x_0)} B$, ja jälkimmäinen vaihtoehto tiedetään mahdottomaksi, niin kaikilla $a \in M$ pätee $\mathcal{M} \not\models_{s(a/x_0)} A$, kuten haluttiin.

7. Näytä, että $\exists x_0 \forall x_1 (A \wedge B) \;\Leftrightarrow\; \exists x_0 (\forall x_1 A \wedge \forall x_1 B)$.

   Ratkaisu: Todistetaan väite kahdessa osassa. Osoitetaan, että seuraavat väitteet pätevät:

   (1) $\forall x_1 (A \wedge B) \Leftrightarrow \forall x_1 A \wedge \forall x_1 B$

   (2) Jos $C \Leftrightarrow D$ niin $\exists x_0 C \Leftrightarrow \exists x_0 D$.

   Haluttu väite seuraa sitten valitsemalla $C \Leftrightarrow D$ olemaan kohdan (1) looginen ekvivalenssi. Todistukset ovat seuraavanlaiset:

   (1) Tarskin totuusmääritelmän nojalla

   $$\begin{aligned}
   &\mathcal{M} \models_s \forall x_1 (A \wedge B) \\
   &\text{joss kaikilla } a \in M \text{ pätee } \mathcal{M} \models_{s(a/x_0)} A \wedge B, \\
   &\text{joss kaikilla } a \in M \text{ pätee } \mathcal{M} \models_{s(a/x_0)} A \text{ ja } \mathcal{M} \models_{s(a/x_0)} B, \\
   &\text{joss } \mathcal{M} \models_s \forall x_0 A \text{ ja } \mathcal{M} \models_s \forall x_0 B, \\
   &\text{joss } \mathcal{M} \models_s \forall x_0 A \wedge \forall x_0 B,
   \end{aligned}$$

   kuten haluttiin.

   (2) Tarskin totuusmääritelmän nojalla

   $$\begin{aligned}
   &\mathcal{M} \models_s \exists x_0 C \\
   &\text{joss jollakin } a \in M \text{ pätee } \mathcal{M} \models_{s(a/x_0)} C, \\
   &\text{joss jollakin } a \in M \text{ pätee } \mathcal{M} \models_{s(a/x_0)} D, \\
   &\text{joss } \mathcal{M} \models_s \exists x_0 D,
   \end{aligned}$$

   missä oletusta $C \Leftrightarrow D$ sovellettiin malliin $\mathcal{M}$ ja tulkintafunktioon $s(a/x_0)$.