Topologi Ib
Kandidatprogrammet i matematiska vetenskaper
Hösten 2018
Övning 6

Tilläggspoäng: varje vecka ger 2–3 lösta uppgifter +1/2 p, och 4–6 lösta uppgifter ger +1 p. Påminnelseuppgifterna räknas inte in.

Påminnelseuppgift 1. Låt (X, d) vara ett metriskt rum och (x_n) en konvergent följd i X som konvergerar mot punkten $a \in X$. Försäkra dig om att varje delföljd till (x_n) konvergerar mot a.

Påminnelseuppgift 2. Visa att rummet $C([0, 1])$ är fullständigt för sup-normen. (Tips: Hur kan du använda dig av uppgift 6 från förra veckan?)

Påminnelseuppgift 3. Antag att (X, d) är ett kompakt metriskt rum och $A \subset X$. Försäkra dig om att ∂A är en kompakt delmängd av X.

Påminnelseuppgift 4. Låt (X, d) vara ett kompakt metriskt rum och låt $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ vara en avtagande följd slutna icke-tomma delmängder. Visa att snittet $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}$ är kompakt.

Egentliga uppgifter:

Uppgift 1. Antag att X är ett fullständigt rum och $f : X \to Y$ bilipschitz. Visa att mängden fX är fullständig och således sluten i Y.

Uppgift 2. Antag att (X, d) och (Y, d') är metriska rum, $A \subset X$ och $f : \bar{A} \to Y$ en kontinuerlig avbildning som är likformigt kontinuerlig i A (dvs $f \restriction_A : A \to Y$ är likformigt kontinuerlig). Visa att f är likformigt kontinuerlig i hela $\bar{A}$.

Uppgift 3. Visa att mängden $S^{n-1}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\|_2 = r\}$ är kompakt i rummet $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ för varje $x \in \mathbb{R}^n$ och $r > 0$. (Tips: Vad vet du om urbilden av slutna mängder för kontinuerliga funktioner?)

Uppgift 4. Låt (X, d) vara ett kompakt metriskt rum och låt $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ vara en avtagande följd slutna icke-tomma delmängder. Visa att snittet $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}$ inte är tomt. (Tips: Om du väljer $x_n \in A_n$ för varje n, vad vet du om följden (x_n)?)

Uppgift 5. Låt $f_v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara avbildningen $x \mapsto x/3$ och $f_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avbildningen $x \mapsto 1 - x/3$. Definiera vidare $A_1 = [0, 1]$, och för $n > 1$ $A_{n+1} = f_v A_n \cup f_h A_n$. Låt $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. ($A$ kallas *Cantors mängd.*)

(a) Rita mängderna $A_1, A_2, A_3, \dots$ (så långt du kan).
(b) Visa att A är kompakt och icke-tom.

Uppgift 6. (Fullständighet vs. kompakthet) Från Påminnelseuppgif 2 vet vi att $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ är fullständigt. Visa att den slutna kulan $\bar{B}_{d_\infty}(0,1)$ ändå inte är kompakt. (Tips: granska t.ex. följden av funktioner $f_n(x) = \max\{1 - |2nx - n|, 0\}$.)